

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1990/91

Oktober/November 1990

EUM 101 - Matematik Kejuruteraan I

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 8 muka surat tercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana LIMA (5) soalan. Tunjukkan kerja pengiraan dengan jelas.

Mesin hitung boleh digunakan.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan di dalam Bahasa Malaysia.

"Crafty men condemn studies; simple men admire them, and wise men use them"
(Francis Bacon).

...2/-

1. (a) Katakan $f(x) = 2x$ dan $g(x) = x \sin x$, cari $(f \circ g)(x)$? Seterusnya carilah nilai k supaya fungsi

$$r(x) = \begin{cases} \frac{(f \circ g)(x)}{f^2(x)} & , x \neq 0 \\ k - \frac{f(x)}{2} & , x = 0 \end{cases}$$

selenjar pada $x = 0$?

Dengan nilai k yang diperolehi itu, nyatakan sama ada fungsi $r(x)$ itu boleh dibeza atau tidak pada $x = 0$?

(30%)

- (b) Jika diberi $f(x) = \sqrt{x}$, carilah had bagi fungsi (jika ujud);

$$\text{had}_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - f(16)}{f(x) - 2}$$

Seterusnya carilah juga had bagi fungsi-fungsi berikut (jika ujud);

(i) $\text{had}_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 3x - 4)^2}{x - 4}$;

(ii) $\text{had}_{x \rightarrow -2} \frac{|x|}{x - 2}$;

(iii) $\text{had}_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin 5x}$;

(iv) $\text{had}_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x - 1)^2}$;

(v) $\text{had}_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 \sin(5(x-1)^2)}{x^4 - 2x^3 + x^2}$;

(40%)

(c) Dapatkan terbitan pertama bagi setiap fungsi berikut:

(i) $y = (9z^{5/3} - 5z^{3/5})^3$;

(ii) $y = \cos(\sin(\sqrt{1-x^2}))$;

(iii) $y = \frac{\ln t}{e^{2t} + 1}$;

(iv) $x^2 + axy + y^2 = b^2$;

(v) $\sin(x+y) + \cos(x-y) = 1$.

(30%)

2. (a) Carilah dy/dt dan d^2y/dt^2 di dalam fungsi t , jika diberi,

(i) $y = 1+v^2$, $v = 1+s^2$ dan $s = 2t - 5$.

(ii) $y = v^2 - 1$, $v = \sec s$ dan $s = \pi t$.

(30%)

(b) Katakan diberi fungsi $f(t) = -(1 + 2t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3)$.

Dapatkan jeda yang mana fungsi itu menokok dan menyusut.

Tentukan nilai ekstremum tempatan dan titik lengkung balasnya (jika ujud). Seterusnya bincangkan kecekungan fungsi tersebut dan lakarkan grafnya di atas kertas graf.

(40%)

(c) Nilaikan kamiran bagi setiap fungsi berikut:-

(i) $\int \frac{e^{3t}}{\sqrt{4 - e^{6t}}} dt$;

(ii) $\int \frac{2+x^5}{x^2-1} dx$;

(iii) $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx$;

(iv) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \, dx$;

(v) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \exp(\ln(3 \sin x^2)) dx$;

(30%)

3. (a) (i) Tunjukkan jika m dan n adalah integer positif maka,

$$\int \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C, & \text{jika } m \neq n \\ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2mx)}{4m} + C, & \text{jika } m = n \end{cases}$$

Gunakan keputusan di atas untuk menunjukkan bahawa:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{jika } m \neq n \\ \pi & \text{jika } m = n \end{cases}$$

(ii) Dapatkan $\int t e^{-at} dt$ dan seterusnya nilaikan hasil kamiran,

$$\int_0^{1/a} t e^{-at} \ln(1+at) dt .$$

(50%)

(b) Sebuah kilang pengeluaran berupaya mengeluarkan 25 unit komponen elektrik dalam masa seminggu. Dari pengalaman yang lalu, diketahui bahawa s komponen dapat dijual dengan harga r ringgit setiap komponen yang mana $r = 110 - 2s$ dan kos pengeluaran s komponen itu ialah $600 + 10s + s^2$ ringgit. Berapakah unit komponen yang dikeluarkan setiap minggu supaya keuntungan yang diperoleh itu maksimum?

[Nota: Keuntungan = Kos Jualan - Kos Pengeluaran].

(20%)

- (c) Terangkan kaedah Newton-Raphson untuk mendapatkan penghampiran punca bagi suatu persamaan.

Katakan diberi fungsi,

$$g(x) = \cos x - \cos 5x .$$

Dengan menggunakan kaedah Newton-Raphson, dapatkan anggaran punca bagi $g(x) = 0$ tepat kepada 3 titik perpuluhan? Gunakan nilai awal $x_0 = 1$.

(30%)

4. Di dalam ekonomi pengeluaran, dua faktor terlibat:

x : modal yang dilabur

y : tenaga (labour) yang dilabur

Proses pengeluaran yang intensif modal mungkin perlu sedikit tenaga, dan begitulah sebaliknya. Fungsi pengeluaran Cobb-Douglas, suatu model matematik yang sesuai untuk memerihalkan pengeluaran, mengaitkan $f(x, y)$, bilangan unit yang dikeluarkan dengan x unit modal dan y unit tenaga, seperti berikut:

$$f(x, y) = C x^a y^{1-a} , \quad 0 < a < 1, C > 0$$

C adalah pemalar kadaran dan a bergantung kepada jenis barang yang dikeluarkan dan kaedah-kaedah pengeluaran.

- (a) Katakan di dalam pengeluaran jam digit, $a = 2/3$ dan $C = 20$. Apakah bilangan unit yang dikeluarkan jika 27 unit modal dan 8 unit tenaga dilabur?

(10%)

- (b) Bagi pengeluaran satu komponen elektronik, persamaan Cobb-Douglas digunakan dengan $C = 2$ dan $a = 4/5$.

- (i) Dengan mempertimbangkan nilai a , komen sama ada proses ini intensif modal atau intensif tenaga.

(10%)

(ii) Jika 243 unit modal dan 32 unit tenaga dilabur, cari kadar perubahan pengeluaran terhadap kadar perubahan kedua-dua pembolehubah.

(20%)

(c) Bagi model Cobb-Douglas di atas, tunjukkan bahawa jika kedua-dua modal dan tenaga digandaduaikan (darab dengan 2), pengeluaran juga digandadua.

(20%)

(d) Tunjukkan bahawa $\partial f / \partial x$, daya pengeluaran berjidar (marginal productivity) bagi modal, dan $\partial f / \partial y$, daya pengeluaran berjidar bagi tenaga, kedua-duanya adalah positif jika x dan y positif.

(20%)

(e) Tunjukkan bahawa $\partial^2 f / \partial x^2$ dan $\partial^2 f / \partial y^2$ kedua-duanya adalah negatif bagi kesemua x dan y positif.

(20%)

5. (a) Persamaan haba 2-dimensi bagi satu satah tertebat adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Tunjukkan bahawa fungsi

$$u = u(x, y, t) = \exp[-(m^2 + n^2)kt] \sin(mx) \cos(ny)$$

memenuhi persamaan haba di atas bagi sebarang pemalar m dan n .

(40%)

(b) Hukum gas unggul diperihalkan oleh

$$PV = nRT$$

yang mana n adalah nombor mol gas, R adalah pemalar, P adalah tekanan, V adalah isipadu, dan T adalah suhu. Tunjukkan bahawa hubungan yang menarik berikut adalah benar.

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

(30%)

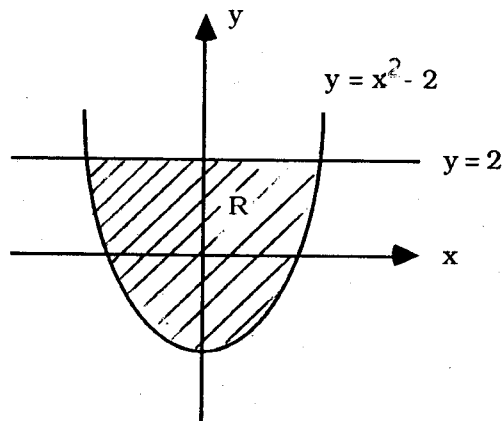
(c) Hasil per hektar tanaman di ladang adalah tidak seragam pada amnya. Biasanya hasil tertinggi didapati di tengah ladang dan hasil terendah di sempadannya. Jika fungsi $h(x, y)$ mewakili hasil per hektar, maka hasil keseluruhan ladang (suatu rantau R), H , diberi oleh

$$H = \iint_R h(x, y) dx dy$$

Jika didapati bahawa hasil per hektar padi yang ditanam di dalam satu rantau R (seperti di bawah) boleh dianggar dengan fungsi

$$h(x, y) = 200 - 3x^2 - 3y^2 \quad (\text{ton per hektar})$$

cari anggaran hasil keseluruhan ladang tersebut.



(30%)

6. Takrifkan fungsi gamma, bagi nombor nyata $t > 0$, sebagai

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

(a) Tunjukkan bahawa

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \text{ n integer positif}$$

(Petunjuk: Kamiran bahagian demi bahagian). (20%)

(b) Buktikan fungsi gamma dari soalan (a) bagi $n = 1$. (20%)

(c) Gunakan kaedah aruhan matematik untuk membuktikan bahawa

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (40\%)$$

(d) Dengan penggantian $u = x^t$ dapatkan satu ungkapan alternatif bagi $\Gamma(x)$. (20%)

- oooOooo -