

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1990/91

Mac/April 1991

EUM 101 - Matematik Kejuruteraan I

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 8 muka surat bercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana LIMA(5) soalan sahaja.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.

...2/-

1. (a) Nyatakan teorem himpitan (Squeeze theorem). Dengan menggunakan teorem ini, buktikan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(20%)

- (b) Cari nilai had berikut (jika wujud):

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 8|$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin 2x}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \sin(3(x-1)^2)}{(x-1)^2(x^2+2x+1)}$

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

(50%)

- (c) Terbitkan penurunan rumus

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

...3/-

dan dengan menggunakan rumus ini dapatkan nilai

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$$

(30%)

2. (a) Nyatakan aturan L'Hopital.
Fungsi f ditakrifkan sebagai,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 5x}{x} & , x \neq 0 \\ k & , x = 0 \end{cases}$$

k adalah malar.

Cari nilai k supaya f(x) selanjut pada x = 0. Adakah f boleh beza pada x = 0?

Katakan g(x) = cos x - cos 5x, 0 < x < π/2.

Dengan menggunakan kaedah Newton-Raphson, anggarkan punca persamaan g(x) = 0 dengan memberi jawapan anda tepat kepada 3 tempat perpuluhan.

(70%)

- (b) Jisim suatu zarah, m bergerak sepanjang paksi x supaya kedudukan x dan halaju $V = \frac{dx}{dt}$ memuaskan persamaan,

$$m (V^2 - V_0^2) = k (x_0^2 - x^2).$$

...4/-

V_0, X_0 dan k adalah malar. Dengan menggunakan kebezaan tak terstrat, tunjukkan bahawa

$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

bila $V \neq 0$.

(30%)

3. (a) Selesaikan setiap kamiran tak tentu berikut:

(i) $\int \frac{x-1}{x+2} dx$;

(ii) $\int |x| dx$;

(iii) $\int \frac{\cos(\ln 4x^2)}{x} dx$;

(iv) $\int \sqrt{z} \ln z dz$.

(40%)

(b) Jika $I_{m,n} = \int \frac{-z^m}{(1+z^2)^{n-1}} dz$ dan m, n ialah integer positif,

tunjukkan bahawa

$$2(n-1)I_{m,n} = \frac{-z^{m-1}}{(1+z^2)^{n-1}} + (m-1)I_{m-2, n-1}$$

...5/-

Seterusnya dapatkan nilai

$$\int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^2)^3} dx$$

(60%)

4. (a) Tentukan samada siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ berikut menumpu atau mencapah:

(i) $a_n = \frac{5n^3 + 2n - 1}{n^4 + 3}$;

(ii) $a_n = \frac{5^n}{(2n+1)!}$;

(iii) $a_n = \frac{4 + \cos n}{n^3}$

(30%)

- (b) Dapatkan jejari penumpuan bagi siri kuasa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

Cari nilai x supaya siri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n(x^2 + 1)^n}$

menumpu secara mutlak.

(40%)

...6/-

(c) (i) Jika $h(x)$ fungsi ganjil, buktikan bahawa $|h(x)|$ dan $h^2(x)$ adalah fungsi genap.

(ii) Tunjukkan bahawa siri Fourier bagi fungsi

$$g(x) = \frac{x^2}{4}, \quad -\pi < x < \pi$$

diberi oleh,

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

(30%)

5. (a) Diberi fungsi,

$$g(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1.$$

Dapatkan titik-titik genting dan tentukan nilai maksimum dan minimum tempatan bagi fungsi tersebut. Lakarkan graf fungsi dan tentukan jeda yang mana fungsi menokok dan menyusut. Bincangkan juga kecekungan fungsi tersebut.

(50%)

(b) Air diisi ke dalam suatu bekas berbentuk kun pada kadar 9m^3 per minit. Tinggi bekas itu ialah 4m dan jejari permukaan kun ialah 2m . Berapakah kadar kelajuan paras air bertambah bila ketinggian air ialah 3m ? Tunjukkan bahawa pada sebarang masa t , kecepatannya adalah negatif.

(30%)

(c) Nilaikan

(i) $\int_0^{\pi/2} e^{\cos t} \sin t \, dt$

...7/-

$$(ii) \int_1^e \left[\int_0^1 1ny \, dx \right] dy$$

(20%)

6. (a) Jika $f = f(x,y)$ dan $x = 2u - v$, $y = u + 2v$, selesaikan u dan v dalam sebutan x dan y . Seterusnya dapatkan

$$(i) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ;$$

$$(ii) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} ;$$

$$(iii) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

dalam sebutan terbitan-terbitan terhadap u dan v .
Tunjukkan bahawa

$$5 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

(60%)

- (b) Katakan x , y dan z ialah koordinat kartesian dan ρ , θ , z ialah koordinat silinder.

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad \text{dan} \quad z = z.$$

Jika $f = f(x, y, z)$, tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}$$

(20%)

- (c) Tentukan isipadu, V yang terkandung di antara permukaan $Z = x^2 + y^2 + 2$ dan segiempat tepat, $R = \{ (x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 2 \}$.

(20%)

- oooOooo -