UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1994/95

Oktober/November 1994

MST563 - Statistik Tertib

Masa: [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan. Tuliskan jawapan dengan jelas dan teratur. **Semua** soalan membawa markah 100.

1. Andaikan $X_{(r)}$ menandakan statistik tertib terkecil ke-r dalam satu sampel rawak saiz n yang diambil dari suatu populasi selanjar dengan fungsi taburan kumulatif F(x). Jika $Z_r = F(X_{(r)})$, tunjukkan Z_r mempunyai taburan beta dengan fungsi taburan kebarangkalian

$$h(z) = n\binom{n-1}{r-1} z^{r-1}(1-z)^{n-r} \quad , \quad 0 < z < 1$$

dan

$$E(Z_r) = \frac{r}{n+1} \quad , \quad Var(Z_r) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} .$$

Menggunakan penghampiran berikut untuk dua momen pertama suatu fungsi g(Z) bagi suatu pembolehubah rawak Z,

$$E\{g(Z)\} \approx g\{E(Z)\}$$
$$Var\{g(Z)\} \approx Var(Z)\left[g^{(1)}\{E(Z)\}\right]^2$$

tunjukkan bahawa $E(X_{(r)}) \approx F^{-1}\left\{\frac{r}{n+1}\right\}$ dan

$$Var(X_{(r)}) \approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\left\{f\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)\right]\right\}^{-2}$$

Jika penghampiran itu digunakan terhadap kes eksponen dengan $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, tunjukkan bahawa

$$E(X_{(r)}) \approx \log\left(\frac{n+1}{n+1-r}\right)$$

dan

$$Var(X_{(r)}) \approx \frac{r}{(n+2)(n-r+1)}$$

...2/-

2. Katakan $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ mewakili statistik-statistik tertib dalam satu set sampel saiz n yang telah diambil dari suatu populasi dengan fungsi taburan kumulatif selanjar F(x) dan fungsi ketumpatan kebarangkalian f(x), masing-masing. Buktikan bahawa fungsi ketumpatan kebarangkalian $X_{(r)}$ dan $X_{(n-r+1)}$ untuk $r < n/2$ diberi oleh

$$g(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!^2(n-2r)!} \left[F(x)\{1-F(y)\}\right]^{r-1} \{F(y) - F(x)\}^{n-2r} f(x) f(y)$$

$$-\infty < x < y < \infty .$$

dan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$W_r = X_{(n-r+1)} - X_{(r)} ,$$

ialah

$$\ell(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, w+x)\, dx .$$

Untuk kes seragam dengan $f(x) = 1$, $(0 < x < 1)$ dan sifar di tempat lain, tunjukkan bahawa W_r mempunyai taburan beta dan

$$E(W_r^s) = \frac{(n-2r+s)(n-2r+s-1)\cdots(n-2r+1)}{(n+s)(n+s-1)\cdots(n+1)} \quad , \quad s \ge 1$$

3. (a) Dalam suatu ujian hayat yang melibatkan n komponen, ujian ditamatkan sejurus dua kegagalan berlaku. Katakan $X_{(1)} < X_{(2)}$ menandakan tertib masa hingga gagal bagi dua komponen yang gagal itu. Jika masa hingga gagal bagi komponen-komponen itu merupakan pembolehubah rawak tak bersandar tertabur secara secaman dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \sigma^{-1} \exp\{-(x-\theta)\sigma^{-1}\} \quad , \quad \theta < x < \infty$$

tunjukkan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum $X_{(1)}$, $X_{(2)}$ ialah

$$g(x_1, x_2) = \frac{n(n-1)}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{\sigma}\{x_1 + (n-1)x_2 - n\theta\}\right]$$

Penganggar-penganggar saksama varians minimum untuk θ dan σ masing-masing ialah

$$\hat{\theta} = X_{(1)} - n^{-1}\hat{\sigma} \text{ dan } \hat{\sigma} = (n-1)\left(X_{(2)} - X_{(1)}\right)$$

...3/-

Tunjukkan $X_{(1)}$ dan $\hat{\sigma}$ adalah pembolehubah rawak tak bersandar, dan yang demikian atau cara lain, buktikan bahawa

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right) = \frac{2\sigma^2}{n}$$

(b) Dalam satu ujian hayat lain, satu lagi sampel (tak bersandar dengan yang pertama) yang mengandungi n komponen diuji. Jika masa hingga gagal merupakan pembolehubah rawak tak bersandar tertabur secara secaman dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \sigma^{-1} \exp\left\{-(x-\theta)\sigma^{-1}\right\}$$

tunjukkan kebarangkalian tepat u komponen dalam sampel kedua mempunyai masa hayat kurang dari $X_{(1)}$, statistik tertib terkecil dalam sampel pertama, ialah

$$\tfrac{1}{2}\binom{n}{u}\Big/\binom{2n-1}{u}.$$

4. Andaikan $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(2m+1)}$ mewakili statistik tertib dalam satu sampel rawak saiz (2m + 1) yang diambil dari taburan $U(\theta_1, \theta_2)$.

(a) Tunjukkan median sampel $X_{(m+1)}$, $U = \frac{1}{2}\left(X_{(1)} + X_{(2m+1)}\right)$ dan $\overline{X} = \sum_{i=1}^{2m+1} X_i/(2m+1)$, semuanya mempunyai nilai jangkaan sama dengan min populasi, $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$.

(b) Tunjukkan bahawa

$$\mathrm{Var}\left(X_{(m+1)}\right) = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{4(2m+3)}$$

$$\mathrm{Var}\,(\overline{X}) = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12(2m+1)}$$

dan

$$\mathrm{Var}\,(U) = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{2(2m+2)(2m+3)}$$

...4/-

(c) Kaji tabiat penghad nisbah varians ketiga-tiga penganggar itu apabila $m \to \infty$ dan beri komen mengenai implikasi keputusan-keputusan itu.

5. Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ mewakili satu sampel rawak saiz n yang diambil dari suatu populasi dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & , \quad \text{jika } x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{ditempat lain} \end{cases} .$$

Jika $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ menandakan set statistik tertib hasil menyusun magnitud X secara menaik,

(a) Tunjukkan $X_{(r)}$ dan $X_{(s)} - X_{(r)}$ tak bersandar untuk sebarang $s > r$.

(b) Cari fungsi ketumpatan kebarangkalian $X_{(r+1)} - X_{(r)}$.

(c) Katakan

$$Z_1 = nX_{(1)} = Z_2 = (n-1)\left(X_{(2)} - X_{(1)}\right),$$

$$Z_3 = (n-2)\left(X_{(3)} - X_{(2)}\right), \cdots, Z_n = \left(X_{(n)} - X_{(n-1)}\right).$$

Tunjukkan bahawa $\left(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\right)$ dan $\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$ tertabur secara secaman.

- oooOOooo -