

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1994/95

Oktober/November 1994

MKT443 - Pemodelan Matematik

Masa: [3 jam]

Jawab **SEMUA TIGA (3)** soalan.

Pertukaran Unit	
1 batu = 5280 kaki	1 kaki = 0.3048 meter
1 MGD = 0.05262 m ³ /s	1 gelen = 4.546 liter
1 lb = 0.4536 kg	1 kg = 10 ⁶ mg = 10 ⁹ µg
g = 9.81 m/s ²	

1. (a) Dapatkan persamaan gelombang tulin berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

di mana $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ dan t, x ialah masa dan jarak masing-masing. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang telah digunakan dan berikan makna dan unit bagi setiap sebutan di atas.

- (b) Sahkan bahawa gelombang menjalar $n = a \cos(\sigma t - kx)$,
 $u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \cos(\sigma t - kx)$ adalah satu penyelesaian, dengan $\sigma^2 = ghk^2$.
Apakah makna dan unit bagi σ dan k ?

- (c) Suatu saluran seragam mempunyai dalaman $h = 10\text{m}$, dengan kedua-dua hujung terbuka kepada pasang surut berkalaan 12.42 jam (misalkan Selat Barat). Perihalkan pasang surut ini melalui teori di atas jika amplitudnya ialah 1.1 m. Apakah nilai σ dan k dan panjang gelombang.

...2/-

- (d) Jika rintangan dipertimbangkan, maka persamaan (1) di bahagian (a) boleh digantikan oleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial n}{\partial x} + Ru = 0 \quad (3).$$

manakala (2) dikekalkan.

Dapatkan penyelesaian gelombang menjalar:

$$u = ae^{-\beta x} \cos(\sigma t - kx + \alpha), \text{ di mana}$$

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{gh} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{R^2}{\sigma^2}} \right\}, \text{ dan } \beta = \frac{R\sigma}{2ghk},$$

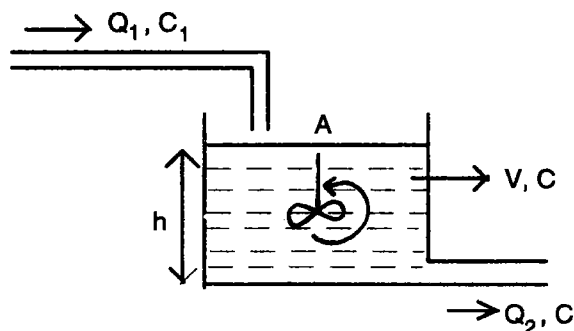
$$n = abe^{-\beta x} \cos(\sigma t - kx), \text{ di mana}$$

$$\tan \alpha = \frac{\beta}{k}, b = \frac{kh}{\sigma \cos \alpha}.$$

Bagi pasang surut seperti di bahagian c, tetapi sekarang $R = 1.5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, perihalkan pasang surut ini. Apakah panjang gelombang sekarang? Apakah beza di antara kedua-dua pasang surut (c) dan (d) dan lakarkan mereka dalam satu rajah yang sama, dengan menerangkan erti dan nilai α .

[100/100]

2. (a) Misalkan gambar berikut yang menunjukkan suatu tangki dengan air masuk-keluar. Biarkan t = masa, C = kepekatan suatu bahan kimia, V = isipadu, Q = kadar aliran, A = luas keratan-rentas, dan h = dalaman air. Andaikan bahan kimia ini merosot secara linear pada kadar γ . Masa diukur dalam saat, jarak meter dan jisim kg. Berikan unit bagi setiap sebutan di atas. Dapatkan persamaan keterusan bagi isipadu dan bagi jisim masing-masing dengan menjelaskan konsep-konsep yang digunakan.



- (b) (i) Pertimbangkan persamaan kepekatan bagi keadaan mantap tanpa aliran air

$$E \frac{d^2 C}{dx^2} - kC = 0,$$

dengan syarat sempadan $C \rightarrow 0$ apabila $x \rightarrow -\infty$ atau ∞ . Andaikan suatu bahan kimia dibuangkan ke dalam sungai di atas pada $x = 0$ dengan kadar $W \text{ kgs}^{-1}$, dan dicampurkan secara seragam. Tunjukkan bahawa penyelesaian ialah

$$C(x) = C_0 e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{k}{E}}$$

dan

$$C_0 = \frac{W}{2A\sqrt{kE}}$$

di mana A ialah luas keratan rentas sungai. Apakah unit C_0 ?

- (ii) Misalnya air najis mentah dilepaskan ke sungai di atas pada $x = 0$ dengan kadar $Q = 0.1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ dan kepekatan kuman FC sebanyak $10^8 / 100 \text{ ml}$. Andaikan $E = 30 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $k = 1.2$ sehari, $A = 100 \text{ m}^2$. Cari C_0 dan $C(x)$ pada $x = 2 \text{ km}$, 10 km . Lakarkan graf bagi $C(x)$ untuk $x \rightarrow -\infty$ dan $x \rightarrow \infty$.

- (c) Pertimbangkan persamaan haba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1),$$

dengan syarat sempadan, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $\forall t \geq 0$ dan syarat awal khas $u(x, 0) = \sin \pi x + 3 \sin 2\pi x$, $x \in (0, 1)$.

- (i) Dapatkan penyelesaiannya melalui pemisahan pembolehubah atau secara lain.
- (ii) Terangkan dengan ringkas langkah-langkah untuk mendapat penyelesaian analitik jika syarat awal digantikan oleh fungsi umum

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, 1).$$

- (iii) Berikan juga langkah-langkah untuk mendapatkan penyelesaian berangka bagi (ii) di atas

[100/100]

3. (a) Pertimbangkan persamaan penerobosan kemasinan di muara

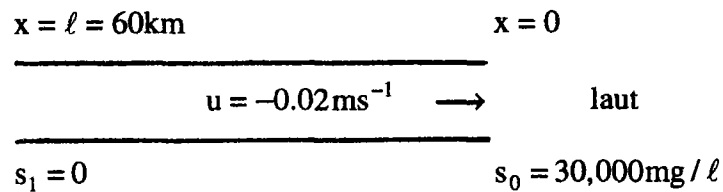
$$\frac{\partial s}{\partial t} = -u \frac{\partial s}{\partial x} + E \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (4)$$

di mana unit bagi masa, jarak dan jisim ialah saat, meter dan kg masing-masing. Dapatkan persamaan (4). Bagi keadaan mantap, kita dapati

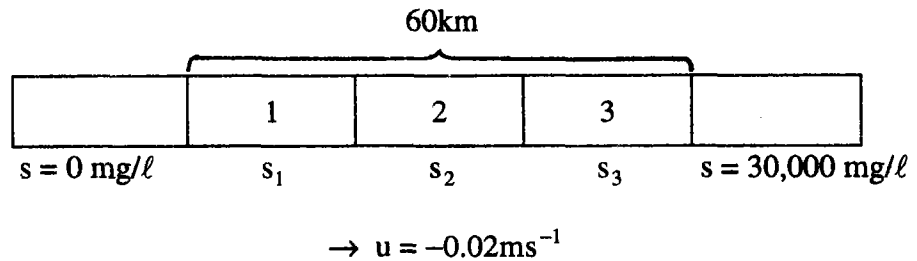
$$E \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Jika syarat sempadan ialah $s(0) = s_0$, $s(\ell) = s_1 = 0$, dapatkan penyelesaian analitik.

Andaikan $E = 20 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\ell = 60 \text{ km}$, $u = -0.02 \text{ ms}^{-1}$ dan $s_0 = 30,000 \text{ mg}/\ell$, dapatkan s pada $x = 15 \text{ km}$, 30 km dan 45 km , dalam unit mg/ℓ .



- (b) Andaikan muara ini dibahagikan kepada 3 segmen seragam seperti berikut dengan luas keratan rentas 1000 m^2 .



Dapatkan persamaan penerobosan kemasinan dalam bentuk segmen sehingga mengikut andaian di atas dan bahagian (a), dan seterusnya selesaikan untuk nilai s_1 , s_2 dan s_3 .

[100/100]

- (c) Pertimbangkan model BOD-DO berkeadaan mantap

$$-v \frac{d\ell}{dx} - k_r \ell = 0$$

$$-v \frac{dc}{dx} - k_r \ell + k_a (c_s - c) = 0$$

dengan syarat $\ell = \ell_0$, $c = c_0$ pada $x = 0$, di mana ℓ = kepekatan BOD, c = kepekatan DO, v = halaju, k_r = kadar reputan, k_a = kadar peranginan, dan c_s = pemalar ketepuan. Biarkan $D = c_s - c$, $D_0 = c_s - c_0$. Berikan anggapan-anggapan terkandung di dalam model di atas.

Tunjukkan bahawa

$$\ell = \ell_0 \exp\left(-k_r \frac{x}{v}\right)$$

$$D = \ell_0 \left(\frac{k_r}{k_a - k_r} \right) \left[\exp\left(-k_r \frac{x}{v}\right) - \exp\left(-k_a \frac{x}{v}\right) \right] + D_0 \exp\left(-k_a \frac{x}{v}\right)$$

Lakarkan ℓ dan D pada graf yang sama.

[100/100]

- ooo00ooo -