

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1994/95

Oktober/November 1994

MAT 320 Persamaan Pembezaan II

Masa : [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Dapatkan A^2 .

(ii) Dapatkan $e^{(A^2t)}$.

(iii) Selesaikan masalah nilai awal

$$\mathbf{x}' = A^2 \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Dengan menggunakan gantian

$x = e^t$ atau cara lain yang bersesuaian,

selesaikan persamaan

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x$$

untuk $x > 0$.

(c) Tentukan bentuk penyelesaian khusus yang sesuai bagi

$$y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1)\sin 2x + 3e^{-x}\cos x + 4e^x,$$

jika kaedah pekali belum tentu digunakan untuk menyelesaikan persamaan ini.

(100/100)

.../2

2. (a) Dengan membuat pertukaran $x - 1 = t$ dan mengandaikan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, ataupun $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n$, dapatkan dua penyelesaian siri, $y_1(x)$ dan $y_2(x)$, yang tak bersandar secara linear bagi

$$y'' + (x - 1)^2 y' + (x^2 - 1)y = 0.$$

Tunjukkan bahawa $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ yang diperolehi adalah tak bersandar secara linear.

- (b) Pertimbangkan masalah Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

- (i) Dapatkan nilai eigen dan fungsi eigen sepadanan masalah ini.
 (ii) Nyatakan syarat yang perlu dipenuhi oleh fungsi f supaya

$$y''(x) + \lambda y(x) = f(x) \quad \text{dengan} \quad y(0) = y(1) = 0$$

mempunyai penyelesaian.

$$\left(\text{Petunjuk: } \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \right).$$

Seterusnya, dapatkan penyelesaian tersebut.

(100/100)

3. (a) Berdasarkan kaedah ubahan parameter (atau cara lain yang bersesuaian), dapatkan penyelesaian khusus kepada

$$y''' - y' = x.$$

(b) Pertimbangkan sistem persamaan

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \text{ dengan}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

(i) Dapatkan penyelesaian am masalah ini.

(ii) Tentukan penyelesaian yang memenuhi syarat awal $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Pertimbangkan persamaan Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

(i) Tunjukkan bahawa $x = 0$ adalah titik singular nalar.

(ii) Nyatakan persamaan Euler yang sepadanan dengan persamaan Bessel tersebut.

(iii) Dapatkan persamaan indeks, punca persamaan indeks dan hubungan jadi semula bagi persamaan Bessel yang diberikan.

(iv) Dapatkan penyelesaian siri, $y_1(x)$, yang sepadanan dengan punca yang lebih besar dan bentuk penyelesaian siri, $y_2(x)$, yang sepadanan dengan punca yang lebih kecil.

(100/100)

4. Seutas tali telah digerakkan dari suatu posisi awal dengan halaju yang telah ditentukan. Perubahan mencancang, $u(x, t)$, perlulah memenuhi persamaan gelombang,

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < b, \quad t > 0,$$

dengan syarat sempadan,

$$u(0, t) = u(b, t) = 0, \quad t \geq 0$$

dan syarat awal

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq b$$

dengan fungsi f dan g , masing-masingnya, diberikan untuk menentukan posisi awal dan halaju tali.

- (a) Tunjukkan bahawa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{b} \left(c_n \sin \frac{n\pi \alpha t}{b} + d_n \cos \frac{n\pi \alpha t}{b} \right),$$

di mana c_n dan d_n adalah pemalar yang dipilih untuk memenuhi syarat awal.

- (b) Nyatakan rumus untuk c_n dan d_n .

(100/100)

- oooOOooo -