UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1994/95

Oktober/November 1994

MAT 301 - Analisis Kompleks

Masa : [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Jika nombor kompleks a dan b bersifat $|a| = 1 = |b|$ dan $ab \neq -1$, tunjukkan bahawa $\dfrac{a+b}{1+ab}$ merupakan nombor nyata.

(b) Selesaikan setiap persamaan berikut dengan meninggalkan jawapan dalam bentuk Cartesan.

(i) $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ (ii) $\sin z = \cosh 2$

(c) Dapatkan semua integer n yang memenuhi $i^n = i$.

(d) Untuk sesuatu nombor nyata α yang ditetapkan, tunjukkan bahawa $w = e^z$ memetakan rantau mencancang $\alpha < y \leq 2\pi + \alpha$ secara satu dengan satu dan keseluruh rantau $|w| > 0$.

(100/100)

2. (a) Bincangkan keterbezaan dan keanalisisan setiap fungsi berikut. Jika terbezakan, ungkapkan terbitan dalam sebutan z.

(i) $f(z) = x - x^3 - xy^2 + i\left(x^2y + y^3 - 8y\right)$

(ii) $f(z) = 2\,\ell nr + (\ell nr)^2 - \theta^2 + 2i\theta\,(1 + \ell nr),$
$z = re^{i\theta}$ dengan $r > 0$ dan $-\pi < \theta < \pi.$

.../2

(b) Tunjukkan bahawa $u(x, y) = x^2 - y^2 + 4$ merupakan fungsi harmonik pada $D = \{z: |z| \leq 1\}$. Dapatkan semua titik $z \in D$ yang menghasilkan nilai maksimum atau nilai minimum fungsi u. Dapatkan juga konjugat harmonik u.

(c) Andaikan $z = re^{i\theta}$ dan $f(z) = Re^{i\Phi}$, dengan $R = R(r, \theta)$ dan $\Phi = \Phi(r, \theta)$. Jika f analisis pada domain D dan $z \neq 0$, tunjukkan bahawa

$$f'(z) = -\frac{i}{z} Re^{i\Phi}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta} + i\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right],$$

dan oleh itu,

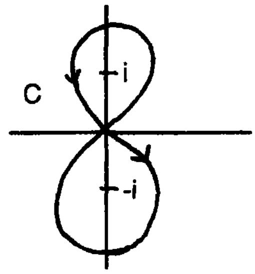
$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - i\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

Jika f analisis dan bukan malar pada $D = \{z: |z| \leq r\}$ dan f mencapai modulus maksimum pada titik $z_0 \in D$, deduksikan bahawa $z_0 f'(z_0)/f(z_0)$ merupakan suatu nombor nyata.

(100/100)

3. (a) Nilaikan setiap kamiran berikut.

(i) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 + 1}\, dz$ pada kontur C seperti yang digambarkan.



(ii) $\displaystyle\int_C \text{Log}\, z\, dz$ dengan C sebagai kontur dari $-i$ ke i yang terletak di sebelah kanan paksi-y.

(iii) $\displaystyle\int_B \frac{\cos(z-i)}{(z+3i)^3}\,dz$ dengan B sebagai bulatan $|z+3i| = 1$ berarah positif.

(iv) $\displaystyle\int_C z^{1+i}\,dz$ dengan z^{1+i} sebagai cabang prinsipal dan C kontur dari -1 ke 2 yang terletak di sebelah atas paksi-x.

(b) Jika C ialah semibulatan $z(t) = Re^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $R \geq 1$, tunjukkan bahawa

$$\left| \int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz \right| \leq \frac{\pi}{R}\left(\ell n\, R + \frac{\pi}{2}\right).$$

(c) Andaikan f fungsi seluruh dan $|f(z)| \leq Mr^{\alpha}$, $|z| = r \geq r_0$, $M > 0$ dan $0 < \alpha < 1$. Tunjukkan bahawa f merupakan fungsi malar. Justeru itu, jika f fungsi seluruh dan $|f(z)| \leq 1 + |z|^{1/2}$ untuk setiap z, deduksikan bahawa f merupakan fungsi malar.

(100/100)

4. (a) Untuk setiap fungsi berikut, tentukan titik kesingularan, nyatakan jenisnya dan jika berkenaan, nyatakan peringkatnya.

(i) $f(z) = z^2 e^{1/z}$

(ii) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-2)^2}$

(iii) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$

(b) Dapatkan tiga perwakilan siri Laurent bagi fungsi $f(z) = \dfrac{1}{3+2z-z^2}$ dalam kuasa z.

(c) Andaikan fungsi f mempunyai titik singular terpencil pada z_0 dan $|f(z)| \le M|z - z_0|^k$, $k > -1$. Tunjukkan bahawa z_0 merupakan titik singular tersingkirkan. Jika $-(n + 1) < k \le -1$, tunjukkan bahawa f mempunyai titik kutub pada z_0 dengan peringkat tidak melebihi n.

(100/100)

- oooOOooo -