

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1994/95

Oktober/November 1994

MAT 201 Kalkulus Lanjutan

Masa : [3 jam]

Jawab kesemua **EMPAT** (4) soalan.

1. (a) Fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ diberikan secara tersirat dengan persamaan

$$2u^2x + v^2y + 2 = 0$$

$$3y^2 + e^u + vy = 13.$$

Cari $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$.

(15/100)

- (b) Tentukan sama ada kamiran tak wajar yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$

(ii) $\int_1^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}} dx$

(iii) $\int_0^{\infty} \frac{\tanh x}{\sqrt{1+x^3}} dx$

(30/100)

(c) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(i) Tunjukkan bahawa $a_n \leq \frac{4}{3}$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

(ii) Tentukan sama ada jujukan $\{a_n\}$ menokok atau menyusut.

(iii) Wujudkah $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$? Berikan alasan. Carinya jika wujud.

(iv) Jika $b_n = \sqrt{n}$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$, tentukan sama ada siri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ menumpu atau mencapah.

(40/100)

(d) Diberi fungsi $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Tentukan sama ada f selanjar pada $(0, 0)$.

(15/100)

2. (a) Diberi $u = \cos \frac{x}{a} \sin \frac{4y}{a}$, di mana a adalah suatu pemalar yang bukan kosong.

(i) Cari $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y}$.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(iii) Jika $v = f(4y - x) + g(4y + x)$, tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 16 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

(iv) Dengan menggunakan bahagian (iii), deduksikan bahawa $u = \cos \frac{x}{a} \sin \frac{4y}{a}$ merupakan suatu penyelesaian untuk persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

$$\left[\text{Ingat kembali: } 2 \sin A \cos B = \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{A-B}{2} \right].$$

(35/100)

(b) Tentukan sama ada siri nombor yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^n + 1}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! 5^n}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$

(40/100)

(c) Persilangan di antara paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan satah $x + y + z = 12$ ialah suatu elips. Cari titik yang paling tinggi dan titik yang paling rendah pada elips ini.

(25/100)

3. (a) Cari selang penumpuan untuk siri kuasa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n (x-1)^n$.

(20/100)

..14

(b) Cari had yang berikut, jika wujud.

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - \pi n + \pi}{7n^2 + 5}$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{n} \right) \left(\sin \frac{1}{n} \right)$$

(15/100)

(c) (i) Lakarkan lengkungan $r = 1 + \sin \theta$.

(ii) D merupakan rantau yang dibatasi di dalam lengkung $r = 1 + \sin \theta$ tetapi di luar bulatan $r = 1$. Jika fungsi f ditakrifkan sebagai

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2}, & \text{untuk } (x, y) \in D \text{ dengan } x \geq y \\ \frac{y}{x^2 + y^2}, & \text{untuk } (x, y) \in D \text{ dengan } x \leq y \end{cases}$$

$$\text{cari } \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

(30/100)

(d) (i) Cari polinomial Taylor $P_2(x)$ dengan baki $R_2(x)$ untuk fungsi

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ di sekeliling titik } x = 2.$$

Jika $f(x)$ ini dianggarkan dengan

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2,$$

cari ralat untuk anggaran ini apabila $|x-2| < \frac{1}{10}$.

(ii) Cari fungsi yang mewakili siri kuasa

$$2 - 6x + 12x^2 - 20x^3 + 30x^4 - \dots$$

(35/100)

4. (a) (i) Kelaskan jenis titik-titik genting bagi fungsi

$$f(x, y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 9x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dan cari nilai ekstremum tempatannya jika wujud.

- (ii) Diberi rantau $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, cari nilai ekstremum fungsi $f(x, y)$ di atas pada rantau D jika wujud.

(25/100)

- (b) (i) Nilaikan $\iint_D y(1 + x^2)^{-1/2} dx dy$ di mana D merupakan kawasan yang dibatasi oleh garis-garis $y = 0$, $x = 4$ dan lengkung $y = \sqrt{x}$.

- (ii) Nilaikan $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \cos(x^2 + y^2) dx dy$

- (iii) Nilaikan $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dy dx$

- (iv) Suatu bongkah A terdiri daripada sebahagian sfera dan sebahagian kon, iaitu

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad -2 \leq z \leq \sqrt{3} \right\}$$

$$\cup \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}, \quad \sqrt{3} \leq z \leq 3 \right\}$$

cari isipadu A .

(75/100)