

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama  
Sidang Akademik 1994/95

Oktober/November 1994

ZSC 310/3 - Kaedah Matematik III

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab KESEMUA LIMA soalan.  
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. Dengan menggunakan ungkapan Fourier sinus-kosinus

(a) Tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a (f(x))^2 dx = \frac{1}{4} A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2),$$

di mana  $A_0$ ,  $A_n$  dan  $B_n$  menyatakan pekali-pekali Fourier dalam ungkapan siri Fourier, sedangkan  $a$  adalah pemalar yang bersangkutan dengan julat kamiran yang ditinjau.

(7 markah)

(b) Jika dipilih  $f(x) = x$  dalam julat  $-1 < x < 1$ , tunjukkan bahawa

$$\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(7 markah)

(c) Serupa dengan (b), jika  $f(x) = x^2$  dengan julat yang sama, tunjukkan pula bahawa

$$\pi^4/90 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

(6 markah)

2. Ditinjau persamaan pembezaan

$$d^2y/dx^2 + A dy/dx + \frac{1}{2}A^2y = B e^{ikx},$$

di mana A, B dan k merupakan pemalar.

(a) Carilah ungkapan jelmaan Laplace persamaan pembezaan bila diketahui  $y(0) = P$  dan  $y'(0) \equiv dy/dx(0) = Q$ , di mana P dan Q juga merupakan pemalar. (Sederhanakan ungkapan jelmaan Laplace, sedemikian songsangnya boleh segera diperolehi dari senarai songsang yang berkenaan.)

(10 markah)

(b) Dengan memanfaatkan senarai jelmaan Laplace dan songsangnya yang berkenaan:

Jelmaan Laplace

Songsang jelmaan Laplace

$$\frac{1}{(s-a)}$$

$$e^{at}$$

$$\frac{b}{[(s+a)^2 + b^2]}$$

$$e^{-at} \sin bt$$

$$\frac{s+a}{[(s+a)^2 + b^2]}$$

$$e^{-at} \cos bt$$

(a dan b merupakan parameter-parameter yang boleh bersifat kompleks), carilah penyelesaian persamaan pembezaan yang berkenaan.

(10 markah)

3. Ditinjau persamaan pembezaan

$$d^2y/dx^2 + \frac{2}{x} dy/dx + \frac{1}{4}(e^{-x} - \mu)y = 0,$$

di mana  $\mu$  merupakan parameter yang belum lagi ditentukan nilainya.

(a) Carilah ungkapan akhir persamaan pembezaan di bawah transformasi berturut-turut  $y = S/x$  dan  $z = e^{-x/2}$ .

(10 markah)

- (b) Tentukan nilai parameter agar persamaan pembezaan bagi  $S$  boleh ditandai sebagai persamaan pembezaan yang dikenali bentuk piawainya.

(5 markah)

- (c) Di antara penyelesaian-penyelesaian bagi  $S$ , pilihlah yang memenuhi syarat terhad dalam julat  $0 \leq x \leq \infty$ . Selanjutnya, nyatakan ungkapan penyelesaian  $y = y(x)$ .

(5 markah)

4. Persamaan Helmholtz homogen dimensi-dua suatu persamaan gelombang sistem yang tak mempunyai unit dimensi boleh dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{1}{4} H = 0,$$

Jika sepanjang paksi  $y$ ,  $H$  tak memperlihatkan sifat sebagai fungsi berosilasi, maka:

- (a) Carilah ungkapan penyelesaian  $H = H(x,y)$ , bila ia memenuhi syarat sempadan:  $H = 0$  pada  $x = y = 0$  dan  $\partial H / \partial x = 0$  pada  $x = \pi$ , dengan amplitud bagi  $H$  dibiarkan boleh sembarangan.

(15 markah)

- (b) Carilah ungkapan fungsi gelombang yang berkenaan jika dipenuhi syarat awal  $\psi(x,y,0) = 0$  dan dengan halaju penjalaran (propagation) adalah  $v$ .

(5 markah)

5. Bayangkanlah suatu cecair likat yang mengalir melalui suatu saluran berkerat-rentas persegi-empat yang dalamnya  $h$  dan memperoleh pemanasan secara homogen pada suatu kedudukan atas permukaannya yang diperlakukan sebagai kedudukan asal, sehingga sistem dipandang mengalami hantaran dan konveksi haba secara pegun dengan persamaan yang berkenaan diberikan oleh

$$v_x \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad v_x = A(h^2 - z^2),$$

di mana  $u$  menyatakan suhu,  $D$  adalah pekali difusi haba dan  $A$  adalah suatu faktor pembanding yang tak perlu diberi rincian maknanya.

- (a) Tunjukkan bahawa  $u(x,z) = T_0 e^{-kx} e^{z^2/d^2}$  memenuhi sebagai penyelesaian, dengan ketentuan  $d = hv_2$ , di mana  $T_0$  adalah suhu pada  $x = z = 0$ .  
(15 markah)
- (b) Tentukan nilai parameter  $k$  dinyatakan dalam  $A$ ,  $D$  dan  $h$  sedemikian memenuhi persyaratan pada (a).  
(5 markah)

- oooOooo -