UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

ZCT 218/3 – Mathematical Methods
[Kaedah Matematik]

Duration: 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please ensure that this examination paper contains **SEVEN** printed pages before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ***TUJUH*** *muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instruction: The paper consists of **SIX (6)** questions. Answer any **FIVE (5)** questions. If you answer all six questions, only the first five questions will be marked. Students are allowed to answer all questions in Bahasa Malaysia or in English.

[Arahan: Kertas ini mengandungi ***ENAM (6)*** *soalan. Jawab mana-mana* ***LIMA (5)*** *soalan. Jika anda menjawab kesemua enam soalan, hanya lima soalan yang pertama yang akan disemak. Pelajar dibenarkan menjawab semua soalan sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.]*

(1) Consider the following function:
[Pertimbangkan fungsi berikut:]

$$f(x) = \begin{cases} 0\,; & -\pi < x < 0 \\ \dfrac{1}{2}x; & 0 < x < \pi \end{cases} \qquad (1)$$

(a) Determine the **Fourier series** for equation (1).
[Tentukan siri Fourier bagi persamaan (1)].

(80/100)

(b) With the result obtained from part (a), show that:
[Dengan keputusan dari bahagian (a), buktikan yang berikut:]

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

(20/100)

(2) (a) Consider the following function:
[Pertimbangkan fungsi berikut:]

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t); & -\pi \le t \le \pi \\ 0; & otherwise \end{cases} \qquad (2)$$

Determine the **Fourier transform** of equation (2).
[Tentukan transformasi Fourier bagi persamaan (2).]

(60/100)

(b) The second definition of **Gamma function,** $\Gamma(z)$ is given as:
[Takrifan kedua bagi fungsi Gamma, $\Gamma(z)$ *diberikan sebagai:]*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-x}\, dx; \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0$$

Using this definition, evaluate:
[Dengan menggunakan takrifan ini, nilaikan:]

$$I = \int_0^1 x \ln(x)\, dx$$

(40/100)

(3) (a) Solve the following initial value problem using the **Laplace transform method:**
[Selesaikan masalah nilai awal yang berikut menggunakan teknik transformasi Laplace:]

$$y'' + 4y' + 13y = 145 \cos(2t), \qquad y = y(t), \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 14$$

(80/100)

(b) Consider the following differential equation:
[Pertimbangkan persamaan pembezaan yang berikut:]

$$y'' + \left\{ \frac{1-2a}{x} \right\} y' + \left\{ b^2 c^2 x^{2c-2} + \frac{a^2 - \upsilon^2 c^2}{x^2} \right\} y = 0 \qquad (3)$$

State the general solution of equation (3) in terms of **Bessel functions**. Next, using equation (3), express the general solution of the following differential equation in terms of Bessel functions:
[Nyatakan penyelesaian am bagi persamaan (3) dalam sebutan fungsi-fungsi Bessel. Kemudian, dengan menggunakan persamaan (3), nyatakan penyelesaian am bagi persamaan pembezaan yang berikut dalam sebutan fungsi-fungsi Bessel:]

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \left\{ 4 + \frac{1}{x^2} \right\} y = 0$$

(20/100)

(4) Consider the following 2-D **wave equation** in Cartesian coordinates:
[Pertimbangkan persamaan gelombang 2-D dalam koordinat Cartesian yang berikut:

$$u_{tt} = \frac{1}{\pi^2}[u_{xx} + u_{yy}]; \quad u = u(x,y,t) \tag{4}$$

[45/100]

With the given initial and boundary conditions, determine the solution of equation (4) using the **separation of variables method.**
[Dengan syarat-syarat sempadan dan syarat-syarat awal yang diberikan di bawah, tentukan penyelesaian bagi persamaan (4) menggunakan kaedah pembolehubah terpisahkan.]

$$u(0,y,t) = 0; \quad u(1,y,t) = 0; \quad t > 0, 0 \le y \le 1$$

$$u(x,0,t) = 0; \quad u(x,1,t) = 0; \quad t > 0, 0 \le x \le 1$$

$$u_t(x,y,0) = 0;$$
$$(x,y,0) = f(x,y)$$

Show details of your work.
[Tunjukkan jalan kerja anda.]

(55/100)

(5) Consider the following 1-D **heat equation** in Cartesian coordinates:
[Pertimbangkan persamaan haba 1-D dalam koordinat Cartesian yang berikut:

$$u_t = u_{xx}; \quad u = u(x,t) \tag{5}$$

(40/100)

With the given initial and boundary conditions, determine the solution of equation (5) using the **separation of variables method.**
[Dengan syarat-syarat sempadan dan syarat awal yang diberikan, tentukan penyelesaian bagi persamaan (5) menggunakan kaedah pembolehubah terpisahkan.]

$$u_x(0,t) = 0; \quad u_x(1,t) = 0; \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) = \cos(\pi x); \quad 0 \le x \le 1$$

(60/100)

Show details of your work.
[Tunjukkan jalan kerja anda.]

(6) (a) Consider the following differential equation:
[Pertimbangkan persamaan pembezaan yang berikut:]

$$\ddot{\Theta} + \cot(\theta)\,\dot{\Theta} + l(l+1)\Theta = 0; \quad \Theta = \Theta(\theta) \tag{6}$$

Given the change of variables: $x = \cos(\theta)$
[Dengan transformasi pembolehubah yang diberi ini :]

Show that equation (6) can be written in the form of:
[Tunjukkan bahawa persamaan (6) boleh ditulis dalam bentuk:]

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + l(l+1)\Theta = 0; \quad \Theta = \Theta(x) \tag{7}$$

Then, write the general solution of equation (7) and finally write the general solution of equation (6).
[Seterusnya, nyatakan penyelesaian am bagi persamaan (7) dan akhir nyatakan penyelesaian am bagi persamaan (6).]

(30/100)

(b) (i) State the general form of a **Laplace equation** in terms of the independent variable u.
[Nyatakan bentuk am persamaan Laplace menggunakan u sebagai pembolehubah yang tidak bersandar.]

(ii) The ∇^2 operator in the spherical coordinates is given as:
[Operator ∇^2 dalam sistem koordinat sfera diberikan sebagai:]

$$\nabla^2 = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot(\theta)}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}u_{\phi\phi}$$

Write the 2-D Laplace equation from part (b)(i) in spherical coordinates system, independent of ϕ, i.e. $u = u(r,\theta)$
[Tuliskan persamaan Laplace 2-D dari bahagian (b)(i) dalam sistem koordinat sfera, yang tidak bersandar terhadap ϕ, yakni $u = u(r,\theta)$]

(iii) Determine the general solution of the 2-D Laplace equation in spherical coordinates as in part (ii), using the separation of variables method, for an interior problem with:
[Tentukan penyelesaian am bagi persamaan Laplace dari (ii) menggunakan kaedah pembolehubah terpisahkan. Pertimbangkan masalah bagi di dalam sfera dengan:]

(70/100)

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le r < 1$

$u(1,\theta) = f(\theta)$

Show details of your work.
[Tunjukkan jalan kerja anda.]

Lampiran

Table of Laplace transform

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at}\sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at}\cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

- oooOooo -