Prosiding

Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-10

Kreativiti Dalam Sains Matematik
Menjana Kecemerlangan Industri Negara

23-24 Disember 2002

Hotel Puteri Pan Pacific
Johor Bahru

Anjuran:

Jabatan Matematik,
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
81310 Skudai, Johor DT

dan

Persatuan Sains Matematik Malaysia
(PERSAMA)

Penyunting-penyunting:

Ali Hassan Mohamed Murid - *Ketua*
Abdul Aziz Abdul Ghani
Abdullah Tahir Hj. Othman
Che Rahim Che Teh
Maselan Ali
Mukheta Isa
Shaharuddin Salleh
Siti Mariyam Hj. Shamsuddin
Sutinah Salim

ISBN: 983-52-0284-2

Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-10
Jabatan Matematik, Fakulti Sains, UTM dan Persatuan Sains Matematik Malaysia

FUNGSI UNIVALEN YANG DIJANA OLEH PENGOPERASI KAMIRAN

[1]Zabidin bin Salleh* & [2]Rosihan M. Ali
[1]SMK. Sultan Badlishah, 09000 Kulim, Kedah Darul Aman
Mel-e : [1]zabidinsalleh@hotmail.com
[2]Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, Pulau Pinang
Mel-e: [2]rosihan@cs.usm.my

Abstrak: Andaikan A melambangkan kelas fungsi analisis f pada cakera unit terbuka $U=\{z:|z|<1\}$ dan ternormalkan supaya $f(0)=0=f'(0)-1$. Untuk $\alpha\geq 0$ dan $\beta<1$, kelas $R(\alpha,\beta)=\{f\in A: Ny[f'(z)+\alpha zf''(z)]>\beta,\quad z\in U\}$ mengitlakkan kelas-kelas yang telah dikaji oleh beberapa tokoh matematik. Dengan menggunakan kaedah konvolusi, kita membangunkan perwakilan kamiran bagi setiap fungsi $f\in R(\alpha,\beta)$. Prinsip subordinasi pula menghasilkan β dalam sebutan α yang menjamin $R(\alpha,\beta)$ terdiri daripada fungsi-fungsi univalen. Beberapa sifat kelas $R(\alpha,\beta)$ akan diperincikan. Di antaranya, kita memperoleh batas terbaik bagi setiap pekali fungsi $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in R(\alpha,\beta)$ dan menentukan batas terbaik untuk fungsian Fekete-Szegö, $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$, dengan μ suatu nombor nyata.

Katakunci: Fungsi univalen, perwakilan kamiran, batas terbaik pekali, fungsian Fekete-Szegö.

1. Pengenalan

Andaikan A melambangkan kelas fungsi analisis f pada cakera unit $U=\{z:|z|<1\}$ dan ternormalkan supaya $f(0)=0=f'(0)-1$. Lambangkan dengan S subkelas kepada A yang terdiri daripada fungsi-fungsi univalen, iaitu, fungsi yang memetakan U secara satu dengan satu ke dalam satah kompleks. Untuk $\alpha\geq 0$ dan $\beta<1$, takrifkan kelas

$$R(\alpha,\beta)=\{f\in A: Ny[f'(z)+\alpha zf''(z)]>\beta,\quad z\in U\}.$$

Kelas ini merupakan pengitlakan kelas yang telah dikaji oleh beberapa tokoh matematik seperti Krzyz (1962), Chichra (1977), Singh & Singh (1989), Mocanu (1986), Todorov *et al.* (1990), serta Fournier & Ruscheweyh (1994).

Dalam makalah ini, kita akan membangunkan perwakilan kamiran bagi setiap fungsi $f\in R(\alpha,\beta)$. Justeru itu fungsi dalam kelas ini dinamakan sebagai *fungsi yang dijana oleh pengoperasi kamiran.*

Umumnya fungsi-fungsi $f\in R(\alpha,\beta)$ tidak semestinya univalen. Chichra (1977) membuktikan bahawa jika $f\in R(1,0)$, maka $Ny\, f'(z)>0$ bagi $z\in U$, dan dengan demikian, $R(\alpha,\beta)$ Dengan α ditetapkan, timbul persoalan untuk mendapatkan nilai β terkecil yang menjaminkan $R(\alpha,\beta)\subset S$, iaitu, masalah untuk mendapatkan nilai

$$\beta_S=\inf\{\beta: R(\alpha,\beta)\subset S\}. \qquad (1.1).$$

Untuk $\alpha=1$, Ali (1994) telah memberi penyelesaian lengkap dengan menunjukkan bahawa $\beta_S=(1-\log 4)/(2-\log 4)\cong -0.6294$.

Daripada perwakilan kamiran kelas $R(\alpha,\beta)$, kita akan memperolehi nilai β_S. Kita juga akan menunjukkan bahawa $R(\alpha,\beta)$ merupakan kelas fungsi yang menyusut terhadap β. Seterusnya batas terbaik bagi setiap pekali fungsi $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in R(\alpha,\beta)$ akan ditentukan, selain mendapatkan batas terbaik untuk fungsian Fekete-Szegö , $\left|a_3-\mu a_2{}^2\right|$, dengan μ suatu nombor nyata.

2. Pendahuluan

Jika $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ dan $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ adalah analisis pada $|z|<R$, maka *hasil darab Hadamard* atau *konvolusi* $f*g$ ialah fungsi analisis yang ditakrifkan oleh siri kuasa

$$(f*g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n,\quad |z|<R.$$

Kita memerlukan beberapa keputusan berikut dalam pengkajian kelas $R(\alpha,\beta)$.

Lema 1 (Ali 1992). *Andaikan $f\in R(\alpha,\beta)$. Maka*

(*a*) $Ny\, f'(z)>1+2(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\alpha n},\quad z\in U.$

(*b*) $Ny\frac{f(z)}{z}>1+2(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n)(1+\alpha n)},\quad z\in U.$

Kedua-dua anggaran ini adalah terbaik. Kenyataan ini dapat dipamerkan menerusi fungsi ekstremum $f_e\in R(\alpha,\beta)$ yang ditakrifkan sebagai

$$f_e(z)=z+2(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(1+n)(1+\alpha n)},\quad z\in U. \tag{2.1}$$

Lema 2 (Singh & Singh 1989). *Jika $P(z)$ analisis pada U, $P(0)=1$, dan $Ny\,P(z)>1/2$, $z\in U$, maka untuk sebarang fungsi F yang analisis pada U, nilai-nilai $(P*F)(z)$ terletak dalam hul cembung $F(U)$.*

3 Perwakilan kamiran

Teorem 1. *Dengan $\alpha=1/(c+1)$, $c>-1$, dan $\beta<1$, setiap fungsi $f\in R(\alpha,\beta)$ dapat diungkapkan dalam bentuk*

$$f(z)=(c+1)\int_0^1 t^{c-1}g(tz)dt \tag{3.1}$$

dengan $g\in P_{0,\beta}=\{h\in A: Ny\, h'(z)>\beta, z\in U\}$.

Bukti. Untuk $f\in R(\alpha,\beta)$, tuliskan $f'(z)+\alpha z f''(z)=g'(z)$. Maka $g\in P_{0,\beta}$. Perhatikan bahawa

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\frac{1}{\alpha}}f'(z)\right]=\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}g'(z)\quad\Rightarrow\quad f'(z)=\psi(z)*g'(z),\quad \psi(z)=\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^z\frac{\zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1-\zeta}d\zeta.$$

Mengamirkan, diperolehi

$$f(z) = z\psi(z) * g(z) = \frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-2} g(\zeta)d\zeta = (c+1)\int_0^1 t^{c-1} g(tz)dt. \ \square$$

Teorem di atas juga menunjukkan bahawa setiap fungsi $f \in R(\alpha,\beta)$ mematuhi persamaan pembezaan linear peringkat pertama

$$zf'(z) + cf(z) = (c+1)g(z).$$

Perwakilan kamiran fungsi $f \in R(\alpha,\beta)$ digunakan untuk mencirikan beberapa sifat kelas $R(\alpha,\beta)$.

Teorem 2. *Andaikan* $f \in R(\alpha,\beta)$ *dan* β_S *seperti dalam* (1.1), *maka nilai* β_S *memenuhi persamaan*

$$\frac{2\beta_S - 1}{2(\beta_S - 1)} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{\alpha}}dt.$$

Bukti. Katalah $A(\beta) = \{\beta : R(\alpha,\beta) \subset S\}$, dan $f \in R(\alpha,\beta)$. Lema 1(a) menghasilkan

$$Ny\, f'(z) > 1 + 2(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\alpha n} = 2\beta - 1 + 2(1-\beta)\int_0^1 \frac{1}{1+t^{\alpha}}dt = 0 \iff \frac{2\beta_0 - 1}{2(\beta_0 - 1)} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{\alpha}}dt.$$

Teorem Noshiro-Warschawski (Goodman, 1983) menghasilkan β_0 dalam sebutan α yang mempastikan bahawa f adalah univalen, iaitu, $f \in S$. Oleh kerana $\beta_0 \in A(\beta)$, maka $\beta_S \le \beta_0$.

Untuk $\beta < \beta_0$, fungsi $f_e \in R(\alpha,\beta)$ yang diberikan oleh (2.1) adalah tak univalen secara setempat, iaitu, $\beta < \beta_0 \Rightarrow \beta \notin A(\beta)$. Justeru itu $\beta_S = \beta_0$. $\square$

Untuk $\alpha = 1$, Teorem 2 menghasilkan keputusan yang dicapai oleh Ali (1994).

Teorem 3. *Jika* $\gamma > \alpha \ge 0$, *maka* $R(\gamma,\beta) \subset R(\alpha,\beta)$.

Bukti. Jika $\alpha = 0$ dan $f \in R(\gamma,\beta)$, maka Lema 1(a) menghasilkan

$$Ny\, f'(z) > 2\beta - 1 + 2(1-\beta)\int_0^1 \frac{1}{1+t^{\gamma}}dt > 2\beta - 1 + 2(1-\beta)\left(\frac{1}{2}\right) = \beta,$$

iaitu, $f \in R(0,\beta)$. Oleh sebab itu, $R(\gamma,\beta) \subset R(0,\beta)$.

Andaikan $\alpha > 0$ dan $\gamma > \alpha$. Diperoleh

$$Ny\,[f'(z) + \alpha z f''(z)] = Ny\left\{\frac{\alpha}{\gamma}\left[\left(\frac{\gamma}{\alpha} - 1\right)f'(z) + f'(z) + \gamma z f''(z)\right]\right\} > \frac{\alpha}{\gamma}\left[\left(\frac{\gamma}{\alpha} - 1\right)\beta + \beta\right] = \beta,$$

iaitu, $R(\gamma,\beta) \subset R(\alpha,\beta)$. $\square$

Teorem 3 ini menunjukkan bahawa $R(\alpha,\beta)$ merupakan kelas fungsi yang menyusut untuk β yang ditetapkan. Seterusnya teorem berikut menunjukkan bahawa kelas $R(\alpha,\beta)$ adalah tertutup di bawah operasi konvolusi.

Teorem 4. *Katalah* $f, g \in R(\alpha,\beta)$ *dan* $h(z) = f(z) * g(z)$. *Maka* $h \in R(\alpha,\beta)$ *jika* $1 - \frac{\alpha}{4(\alpha - M)} \le \beta < 1$ *dengan* $M = \int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}\log(1+t)dt.$

Bukti. Dari sifat konvolusi, diperoleh

$$h'(z)+\alpha zh''(z)=[f'(z)+\alpha zf''(z)]*\frac{g(z)}{z}.$$

Menurut Lema 1(b),

$$Ny\,\frac{g(z)}{z}>1+2(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n)(1+\alpha n)}=2\beta-1+\frac{2(1-\beta)}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}\log(1+t)dt\;.$$

Bagi memenuhi hipotesis Lema 2 , iaitu, $Ny\,g(z)/z>1/2$, kita mensyaratkan

$$2\beta-1+\frac{2(1-\beta)}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}\log(1+t)dt\geq\frac{1}{2}.$$

Oleh sebab itu, $\beta\geq\dfrac{3\alpha-4M}{4(\alpha-M)}=1-\dfrac{\alpha}{4(\alpha-M)}$. Memandangkan $f\in R(\alpha,\beta)$, Lema 2 menghasilkan $Ny\,[h'(z)+\alpha zh''(z)]>\beta$ jika $1-\dfrac{\alpha}{4(\alpha-M)}\leq\beta<1$. □

4. Batas Pekali

Teorem 5. *Andaikan* $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in R(\alpha,\beta)$. *Maka*

$$|a_n|\leq\frac{2(1-\beta)}{n\big(1+\alpha(n-1)\big)},\quad n=2,3,\cdots. \tag{4.1}$$

Ketaksamaan ini adalah terbaik. Satu fungsi ekstremum ialah fungsi f_e *yang diberikan oleh (2.1),* iaitu, $f_e(z)=z+2(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{n+1}}{(1+n)(1+\alpha n)}$, $z\in U$.

Bukti. Daripada (3.1), setiap $f\in R(\alpha,\beta)$ dapat diungkapkan dalam bentuk

$$f(z)=(c+1)\int_0^1 t^{c-1}g(tz)dt,\quad \alpha=\frac{1}{c+1}.$$

Dengan $g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n$, diperoleh $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{b_n}{1+\alpha(n-1)}z^n=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$. Membandingkan pekali, diperolehi

$$a_n=\frac{b_n}{1+\alpha(n-1)},\quad n=2,3,\cdots. \tag{4.2}$$

Oleh kerana $Ny\,g'(z)>\beta$ untuk $z\in U$, maka

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nb_n}{1-\beta}z^{n-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\in P,$$

dengan $P=\{p(z)=1+\sum_1^{\infty}p_n z^n : Ny\,p(z)>0,\quad z\in U\}$. Maka (4.2) menjadi

$$a_n=\frac{b_n}{1+\alpha(n-1)}=\frac{1-\beta}{n(1+\alpha(n-1))}p_{n-1},\quad n=2,3,\cdots. \tag{4.3}$$

Diketahui setiap pekali fungsi dalam kelas P dibatasi oleh nombor 2, justeru itu

$$|a_n|=\frac{|b_n|}{1+\alpha(n-1)}\leq\frac{2(1-\beta)}{n\big(1+\alpha(n-1)\big)},\quad n=2,3,\cdots.$$

Ini membuktikan (4.1). □

Teorem 6. *Andaikan* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in R(\alpha,\beta)$. *Maka untuk nombor nyata* μ, *kita ada ketaksamaan yang terbaik*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\beta)}{3(1+2\alpha)} - \mu\left(\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}\right)^2, & \mu < 0 \quad (4.4a) \\ \dfrac{2(1-\beta)}{3(1+2\alpha)}, & 0 \le \mu \le \dfrac{4(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)} \quad (4.4b) \\ \mu\left(\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}\right)^2 - \dfrac{2(1-\beta)}{3(1+2\alpha)}, & \mu \ge \dfrac{4(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)} \quad (4.4c) \end{cases}$$

Bagi (4.4a) *dan* (4.4 c), *satu fungsi ekstremum ialah*

$$f_0(z) = z + 2(1-\beta)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(1+\alpha(n-1))}, \quad z \in U. \tag{4.5}$$

Manakala untuk (4.4*b*),*satu fungsi ekstremum ialah*

$$f_1(z) = z + 2(1-\beta)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)(1+2\alpha(n-1))}, \quad z \in U. \tag{4.6}$$

Bukti. Daripada (4.3),

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| = \left|\frac{1-\beta}{3(1+2\alpha)} p_2 - \mu \frac{(1-\beta)^2}{4(1+\alpha)^2} p_1^2\right| = \frac{1-\beta}{3(1+2\alpha)}\left|p_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2}\right)p_1^2\right| \tag{4.7}$$

Sekarang pertimbangkan

$$B = \left|p_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2}\right)p_1^2\right|.$$

Menggunakan keputusan Ali (1995), diperolehi

$$B \le 2 + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2} - 1\right| - 1\right)|p_1|^2. \tag{4.8}$$

Perhatikan bahawa,

$$\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2} - 1 \ge 0 \iff 3\mu(1+2\alpha)(1-\beta) \ge 2(1+\alpha)^2 \iff \mu \ge \frac{2(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)}.$$

Kes 1 : Apabila $\mu \ge \dfrac{2(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)}$, maka (4.8) menjadi

$$B \le 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2} - 2\right)|p_1|^2. \tag{4.9}$$

Sekali lagi, perhatikan bahawa

$$\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2} - 2 \ge 0 \iff 3\mu(1+2\alpha)(1-\beta) \ge 4(1+\alpha)^2 \iff \mu \ge \frac{4(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)}.$$

Kes 1.1: Apabila $\mu \ge \dfrac{4(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)}$, maka (4.9) menjadi

$$B \le 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2} - 2\right)(2)^2 = \frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)^2} - 2.$$

Kes 1.2: Apabila $\dfrac{2(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)} \le \mu < \dfrac{4(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)}$, maka (4.9) menjadi

$$B \le 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2} - 2\right)(0)^2 = 2.$$

Kes 2 : Apabila $\mu < \dfrac{2(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)}$, maka (4.8) menjadi

$$B \le 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2} - 1\right)|p_1|^2 = 2 - \left(\frac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{4(1+\alpha)^2}\right)|p_1|^2$$

$$= \begin{cases} 2 - \dfrac{3\mu(1+2\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)^2}, & \mu < 0 \\ 2, & 0 \le \mu < \dfrac{2(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)} \end{cases}$$

Maka dari (4.7),

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| = \frac{1-\beta}{3(1+2\alpha)} B$$

$$\le \begin{cases} \dfrac{2(1-\beta)}{3(1+2\alpha)} - \mu\left(\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}\right)^2, & \mu < 0 \\ \dfrac{2(1-\beta)}{3(1+2\alpha)}, & 0 \le \mu \le \dfrac{4(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)} \\ \mu\left(\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}\right)^2 - \dfrac{2(1-\beta)}{3(1+2\alpha)}, & \mu \ge \dfrac{4(1+\alpha)^2}{3(1+2\alpha)(1-\beta)} \end{cases}$$

Untuk (4.4*a*) dan (4.4 *c*), kesamaan berlaku jika $|p_1| = 2$, iaitu, fungsi ekstremum dalam kelas *P* bagi kes ini ialah $p(z) = (1+z)/(1-z)$. Dengan itu,

$$\frac{g'(z)-\beta}{1-\beta} = \frac{1+z}{1-z} \quad \Leftrightarrow \quad g'(z) = (1-\beta)\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \beta = (1-\beta)\left(-1 + \frac{2}{1-z}\right) + \beta.$$

Justeru

$$g(z) = (1-\beta)(-z - 2\log(1-z)) + \beta z = (2\beta-1)z + 2(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

dan daripada (3.1),

$$f_0(z) = (c+1)\int_0^1 t^{c-1}\left((2\beta-1)tz + 2(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n z^n}{n}\right)dt = z + 2(1-\beta)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n(1+\alpha(n-1))}.$$

Untuk (4.4b), kesamaan berlaku jika $|p_1| = 0$, iaitu, fungsi ekstremum dalam kelas *P* bagi kes ini ialah $p(z) = (1+z^2)/(1-z^2)$. Dengan cara yang serupa, diperoleh fungsi ekstremum

$$f_1(z) = z + 2(1-\beta)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)(1+2\alpha(n-1))}. \quad \square$$

Penghargaan

Penyelidikan penulis kedua telah dibiayai melalui geran penyelidikan fundamental Universiti Sains Malaysia.

Rujukan

1. R. M. Ali, 1992. Subkelas fungsi bak-bintang. *Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-5*: 261-270.
2. R. M. Ali, 1994. On a subclass of starlike functions. *Rocky Mtn. J. Math.* **24**: 447-451.
3. R. M. Ali, 1995. Pekali dua subkelas fungsi bak-bintang. *Matematika* **11**: 73-85.
4. P. N. Chichra, 1977. New subclasses of the class of close-to-convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **62**: 37-43.
5. R. Fournier dan St. Ruscheweyh, 1994. On two extremal problems related to univalent functions. *Rocky Mtn. J. Math.* **24**: 529-538.
6. A. W. Goodman, 1983. *Univalent functions*. Jilid 1, Tampa, Florida: Mariner.
7. J. Krzyz, 1962. A counterexample concerning univalent functions. *Mat. Fiz. Chem* **2**: 57-58.
8. P. T. Mocanu, 1986. On starlikeness of Libera transform. *Mathematica (Cluj)* **28**: 153-155.
9. R. Singh dan S. Singh, 1989. Convolution properties of a class of starlike functions. *Proc. Amer. Math. Soc* **106**: 145-152.
10. P. G. Todorov, S. Owa dan M. Obradovic, 1990. Starlikeness of certain integral operator. *Math. Japonica* **35**: 47-50.