Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke XI
22-24 Disember 2003, Universiti Malaysia Sabah.

FUNGSI ANALISIS DENGAN BAHAGIAN NYATA POSITIF DAN SUBKELAS FUNGSI UNIVALEN

Rosihan M. Ali

Pusat Pengajian Sains Matematik,
Universiti Sains Malaysia, 11800 USM Pulau Pinang
Mel-e: rosihan@cs.usm.my

Abstrak

Beberapa kelas penting fungsi univalen f pada cakera unit $U = \{z : |z| < 1\}$ dapat diterbitkan oleh $zf'(z)/f(z)$ supaya terletak di dalam satu rantau yang diberi pada satah sebelah kanan. Di antara kelas tersebut ialah kelas $BK(\alpha)$ yang terdiri daripada fungsi bak-bintang kuat peringkat α dan kelas $BP(\rho)$ yang mengandungi fungsi bak-bintang parabolik peringkat ρ. Kedua-dua kelas ini berkait rapat dengan kelas P yang terdiri daripada fungsi analisis ternormalkan pada U dengan bahagian nyata positif.

Beberapa anggaran terbaik pekali tak linear untuk fungsi-fungsi dalam kelas P diperoleh. Dengan menggunakan anggaran-anggaran tersebut, batas terbaik untuk empat pekali pertama bagi kelas $BK(\alpha)$ and $BP(\rho)$, serta songsangannya ditentukan. Semua fungsi ekstremum yang mungkin dicirikan. Umumnya, tidak mungkin wujud hanya satu fungsi ekstremum. Fungsian pekali Fekete-Szegö turut juga diselesaikan.

Katakunci

Fungsi univalen, fungsi bak-bintang kuat, fungsi bak-bintang parabolik, batas pekali, fungsian Fekete-Szegö.

1. Pengenalan

Andaikan A melambangkan kelas fungsi analisis f pada cakera unit terbuka $U = \{z : |z| < 1\}$ dan ternormalkan supaya $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Beberapa kelas istimewa fungsi univalen diciri dengan mudahnya secara geometri. Satu contoh terkemuka ialah kelas fungsi bak-bintang BB yang terdiri daripada fungsi analisis $f \in A$ yang memetakan U secara mensebentuk keseluruh domain bak-bintang terhadap asalan O. Secara bergeometri, ini bermakna tembereng garis linear yang menyambungkan O kepada setiap titik lain $w \in f(U)$ terletak keseluruhannya di dalam $f(U)$.

Berkait rapat dengan kelas BB ialah kelas P terdiri daripada fungsi analisis ternormalkan p pada cakera unit U dengan bahagian nyata positif supaya $p(0) = 1$ dan $Ny\, p(z) > 0, \quad z \in U$. Umumnya [11, hal. 42], setiap fungsi $f \in A$ adalah terkandung di dalam BB jika dan hanya jika fungsi $zf'(z)/f(z) \in P$.

Beberapa subkelas fungsi bak-bintang univalen juga diterbitkan oleh $zf'(z)/f(z)$ terletak di dalam satu rantau yang diberi pada satah sebelah kanan. Rantau ini sering kali adalah cembung dan bersimetri terhadap paksi nyata. Ma dan Minda [8] telah memberikan huraian yang baik perihal ini di dalam keadaan yang lebih umum, iaitu, apabila rantau diberikan adalah bak-bintang terhadap titik 1. Kita akan memberi tumpuan kepada dua subkelas berikut.

Fungsi analisis $f \in A$ disebut sebagai bak-bintang kuat peringkat α, $0 < \alpha \le 1$, jika f memenuhi

$$\left| huj \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\pi\alpha}{2} \quad (z \in U).$$

Kelas fungsi-fungsi sedemikian ditandai dengan $BK(\alpha)$. Jelaslah bahawa $BK(1) = BB$. Kelas ini telah dikaji oleh beberapa tokoh [2,3,7,10,13,14]. Dalam makalah [7] ditunjukkan bahawa fungsi univalen f terkandung di dalam $BK(\alpha)$ jika dan hanya jika untuk setiap $w \in f(U)$, rantau berbentuk lensa dengan bucu-bucunya pada asalan O dan w adalah terkandung di dalam $f(U)$. Dengan $\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$, perhatikan bahawa $BK(\alpha)$ mengandungi fungsi-fungsi f supaya $zf'(z)/f(z) \in \varphi(U)$.

Untuk $0 \le \rho < 1$, andaikan Ω_ρ sebagai rantau parabolik pada satah sebelah kanan

$$\Omega_\rho = \left\{ w = u + iv : v^2 \le 4(1-\rho)(u-\rho) \right\} = \left\{ w : | w - 1 | \le 1 - 2\rho + Ny\, w \right\}.$$

Kelas *fungsi bak-bintang parabolik peringkat* ρ ialah subkelas $BP(\rho)$ pada A yang terdiri daripada fungsi-fungsi f supaya $zf'(z)/f(z) \in \Omega_\rho$, $z \in U$. Kelas ini merupakan pengitlakan kelas fungsi cembung secara seragam ternormalkan CSS yang telah diperkenalkan oleh Goodman [4] dalam tahun 1991. Kita mengingatkan kembali bahawa satu fungsi cembung f terletak dalam kelas CSS jika f memiliki sifat tambahan bahawa untuk setiap lengkok membulat γ yang terkandung di dalam U dengan pusat juga di dalam U, imej lengkok $f(\gamma)$ adalah cembung. Umumnya [9, 12], fungsi $f \in CSS$ jika dan hanya jika $zf'(z) \in BP\left(\frac{1}{2}\right)$ Jika

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \Lambda \tag{1}$$

terletak dalam kelas $BK(\alpha)$ (atau $BP(\rho)$), maka songsangan f mempunyai perwakilan

$$f^{-1}(w) = w + \gamma_2 w^2 + \gamma_3 w^3 + \Lambda \tag{2}$$

yang sah di $w = 0$. Di dalam makalah ini , kita menerbitkan beberapa anggaran terbaik pekali tak linear untuk fungsi-fungsi dalam kelas P. Daripada batas-batas ini, kita menentukan batas terbaik empat pekali pertama $| a_n |$ untuk kedua-dua kelas $BK(\alpha)$ dan $BP(\rho)$, empat pekali pertama $| \gamma_n |$ bagi $BK(\alpha)$, serta mencari semua fungsi ekstremum yang mungkin. Meskipun pilihan bersesuaian fungsi ekstremum ialah $p(z) = \frac{1+z}{1-z} \in P$, namun terdapat fungsi ekstremum lain bagi masalah-masalah ini. Selain itu, diperoleh juga anggaran terbaik untuk fungsian pekali Fekete-Szegö $\left| a_3 - t a_2^2 \right|$ atau $\left| \gamma_3 - t\gamma_2^2 \right|$.

2. Beberapa Keputusan Pendahuluan

Kelas $BK(\alpha)$ dan $BP(\rho)$ berkait rapat dengan kelas P. Jelaslah bahawa $f \in BK(\alpha)$ jika dan hanya jika wujud suatu fungsi $p \in P$ supaya $zf'(z)/f(z) = p^{\alpha}(z)$. Dengan membandingkan pekali, setiap pekali bagi $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\Lambda$ dapat diungkapkan dalam sebutan pekali-pekali fungsi $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\Lambda \in P$. Sebagai contoh,

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \alpha c_1 \\
a_3 &= \frac{\alpha}{2}\left[c_2 - \frac{1-3\alpha}{2}c_1^{\,2}\right] \\
a_4 &= \frac{\alpha}{3}\left[c_3 + \frac{5\alpha-2}{2}c_1c_2 + \frac{17\alpha^2-15\alpha+4}{12}c_1^{\,3}\right]
\end{aligned} \tag{3}
$$

Dengan menggunakan perwakilan (1) dan (2) serta $f(f^{-1}(w))=w$ atau

$$w=f^{-1}(w)+a_2(f^{-1}(w))^2+a_3(f^{-1}(w))^3+\Lambda\ ,$$

diperoleh hubungan

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= -a_2 \\
\gamma_3 &= -a_3+2a_2^{\,2} \\
\gamma_4 &= -a_4+5a_2a_3-5a_2^{\,3}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Dengan demikian, masalah anggaran pekali untuk kelas $BK(\alpha)$ dan songsangannya menjadi masalah pekali tak linear untuk kelas P.

Bagi kelas $BP(\rho)$, Ali dan Singh [1] telah menunjukkan bahawa fungsi pemetaan Riemann ternormalkan q dari U keseluruh Ω_ρ ialah

$$q(z)=1+\frac{4(1-\rho)}{\pi^2}\left[\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right]^2.$$

Jika $f(z)=z+b_2z^2+b_3z^3+\Lambda \in BP(\rho)$, dan $h(z)=zf'(z)/f(z)$, maka wujud suatu fungsi Schwarz w pada U dengan $w(0)=0$, $|w(z)|<1$, dan memenuhi

$$h(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}=q(w(z)). \tag{5}$$

Oleh itu fungsi

$$p(z)=\frac{1+q^{-1}(h(z))}{1-q^{-1}(h(z))}=1+c_1z+c_2z^2+\Lambda$$

adalah analisis dan mempunyai bahagian nyata positif pada U, iaitu, $p\in P$. Seterusnya, hubungan berikut mudah dibangunkan:

$$b_2 = \frac{8(1-\rho)}{\pi^2} c_1$$

$$b_3 = \frac{8(1-\rho)}{2\pi^2}\left[c_2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{8(1-\rho)}{\pi^2}\right) c_1{}^2\right] \tag{6}$$

$$b_4 = \frac{8(1-\rho)}{3\pi^2}\left[c_3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{12(1-\rho)}{\pi^2}\right) c_1 c_2 + \left(\frac{2}{45} - \frac{2(1-\rho)}{\pi^2} + \frac{32(1-\rho)^2}{\pi^4}\right) c_1{}^3\right]$$

Justeru sekali lagi kita perhatikan bahawa masalah anggaran pekali untuk $BP(\rho)$ dapat dilihat dalam sebutan masalah pekali tak linear untuk kelas P. Keputusan utama yang digunakan untuk menimbangkan masalah pekali kelas P ini dinyatakan dalam lema berikut.

Lema 1 [5]. Fungsi $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ terletak di dalam P jika dan hanya jika

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\left|2z_j + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_{k+j}\right|^2 - \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} z_{k+j}\right|^2\right\} \geq 0$$

untuk setiap jujukan nombor kompleks $\{z_k\}$ yang memenuhi $\lim_{k\to\infty}\sup |z_k|^{1/k} < 1$.

Lema 2. Jika $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in P$, maka

$$\left|c_2 - \frac{\mu}{2} c_1{}^2\right| \leq maks\{2, 2|\mu - 1|\} = \begin{cases} 2, & 0 \leq \mu \leq 2 \\ 2|\mu - 1|, & selainnya \end{cases}$$

Jika $\mu < 0$ atau $\mu > 2$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $p(z) = (1+\varepsilon z)/(1-\varepsilon z)$, $|\varepsilon| = 1$. Jika $0 < \mu < 2$, maka kesamaan berlaku jika dan hanya jika $p(z) = (1+\varepsilon z^2)/(1-\varepsilon z^2)$, $|\varepsilon| = 1$. Untuk $\mu = 0$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$p(z) := p_2(z) = \lambda \frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z} + (1-\lambda)\frac{1-\varepsilon z}{1+\varepsilon z}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \ |\varepsilon| = 1.$$

Untuk $\mu = 2$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika p ialah salingan p_2.

Catatan. Ma dan Minda [8] telah juga membuktikan keputusan di atas. Kita berikan kaedah pembuktian yang berbeza.

Bukti. Pilihkan jujukan nombor kompleks $\{z_k\}$ dalam Lema 1 sebagai $z_0 = -\mu c_1/2$, $z_1 = 1$, dan $z_k = 0$ jika $k > 1$. Ini menghasilkan

$$\left|c_2 - \frac{\mu}{2} c_1{}^2\right|^2 + |c_1|^2 \leq |(1-\mu)c_1|^2 + 4,$$

iaitu,

$$\left| c_2 - \frac{\mu}{2} c_1{}^2 \right|^2 \le 4 + \mu(\mu - 2) \mid c_1 \mid^2 . \tag{7}$$

Jika $\mu < 0$ atau $\mu > 2$, ungkapan di sebelah kanan ketaksamaan (7) terbatas dari atas oleh $4(\mu - 1)^2$. Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $|c_1| = 2$, i.i., $p(z) = (1+z)/(1-z)$ atau putarannya. Jika $0 < \mu < 2$, maka ungkapan di sebelah kanan ketaksamaan (7) terbatas dari atas oleh 4. Dalam kes ini, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $|c_1| = 0$ dan $|c_2| = 2$, i.i., $p(z) = (1+z^2)/(1-z^2)$ atau putaranya. Kesamaan berlaku apabila $\mu = 0$ jika dan hanya jika $|c_2| = 2$, i.i., [11, hal. 41]

$$p(z) := p_2(z) = \lambda \frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z} + (1-\lambda)\frac{1-\varepsilon z}{1+\varepsilon z}, \quad 0 \le \lambda \le 1, \ |\varepsilon| = 1.$$

Akhirnya, apabila $\mu = 2$, maka $|c_2 - c_1{}^2| = 2$, yang hanya mungkin jika dan hanya jika p ialah salingan p_2. □

Satu aplikasi lain Lema 1 yang menarik berlaku dengan memilih jujukan $\{z_k\}$ sebagai $z_0 = \delta c_1{}^2 - \beta c_2$, $z_1 = -\gamma c_1$, $z_2 = 1$, dan $z_k = 0$ jika $k > 2$. Dalam kes ini, diperoleh

$$\begin{aligned} \left| c_3 - (\beta+\gamma) c_1 c_2 + \delta c_1{}^3 \right|^2 &\le 4 + 4\gamma(\gamma-1) \mid c_1 \mid^2 + \left| (2\delta - \gamma) c_1{}^2 - (2\beta - 1) c_2 \right|^2 - \left| c_2 - \gamma c_1{}^2 \right|^2 \\ &= 4 + 4\gamma(\gamma-1) \mid c_1 \mid^2 + 4\beta(\beta-1) \left| c_2 - \frac{\nu}{2} c_1{}^2 \right|^2 - \frac{(\delta - \beta\gamma)^2}{\beta(\beta-1)} \mid c_1 \mid^4 \end{aligned} \tag{8}$$

dengan $\nu := \dfrac{\delta(\beta-1) + \beta(\delta-\gamma)}{\beta(\beta-1)}$.

Lema 3. Andaikan $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in P$. Jika $0 \le \beta \le 1$ dan $\beta(2\beta-1) \le \delta \le \beta$, maka

$$\left| c_3 - 2\beta c_1 c_2 + \delta c_1{}^3 \right| \le 2.$$

Bukti. Jika $\beta = 0$, maka $\delta = 0$ dan keputusan terhasil sebab $|c_3| \le 2$. Jika $\beta = 1$, maka $\delta = 1$ dan keputusan terhasil dari satu keputusan di dalam [6].

Sekarang andaikan bahawa $0 < \beta < 1$ supaya $\beta(\beta-1) < 0$. Dengan $\gamma = \beta$, kita mendapati daripada (8) bahawa

$$\left| c_3 - 2\beta c_1 c_2 + \delta c_1{}^3 \right|^2 \le 4 + 4\beta(\beta-1) \mid c_1 \mid^2 + 4\beta(\beta-1) \left| c_2 - \frac{\nu}{2} c_1{}^2 \right|^2 - \frac{(\delta - \beta^2)^2}{\beta(\beta-1)} \mid c_1 \mid^4$$

$$\leq 4 + bx + cx^2 := h(x)$$

dengan $x = |c_1|^2 \in [0,4]$, $b = 4\beta(\beta-1)$, dan $c = -(\delta-\beta^2)^2/\beta(\beta-1)$. Oleh sebab $c \geq 0$, didapati $h(x) \leq h(0)$ sekiranya $h(0) - h(4) \geq 0$, i.i., $b + 4c \leq 0$. Keadaan ini adalah setara dengan syarat $|\delta - \beta^2| \leq \beta(1-\beta)$, yang melengkapkan bukti. ▯

Dengan $\delta = \beta$ dalam Lema 3, kita memperoleh perluasan keputusan Libera dan Zlotkiewicz [6] mengenai $\left|c_3 - 2c_1c_2 + c_1^3\right| \leq 2.$

Korolari 1. Jika $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in P$, dan $0 \leq \beta \leq 1$, maka

$$\left|c_3 - 2\beta c_1 c_2 + \beta c_1^3\right| \leq 2.$$

Dengan $\beta = 0$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$p(z) := p_3(z) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{1 + \varepsilon e^{-2\pi i k/3} z}{1 - \varepsilon e^{-2\pi i k/3} z}, \quad (|\varepsilon| = 1)$$

$\lambda_k \geq 0$, dengan $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Jika $\beta = 1$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika p ialah salingan p_3. Jika $0 < \beta < 1$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $p(z) = (1+\varepsilon z)/1 - \varepsilon z)$, $|\varepsilon| = 1$, atau $p(z) = (1 + \varepsilon z^3)/(1 - \varepsilon z^3)$, $|\varepsilon| = 1$.

Bukti. Kita hanya perlu mencari fungsi ekstremum. Jika $\beta = 0$, maka kesamaan berlaku jika dan hanya jika $|c_3| = 2$, i.i., p ialah fungsi p_3 [11, hal. 41]. Jika $\beta = 1$, maka kesamaan berlaku jika dan hanya jika p ialah salingan p_3. Apabila $0 < \beta < 1$, kita mengambil kesimpulan dari (8) bahawa

$$\left|c_3 - 2\beta c_1 c_2 + \beta c_1^3\right|^2 \leq 4 + 4\beta(\beta-1)|c_1|^2 + 4\beta(\beta-1)\left|c_2 - \tfrac{1}{2}c_1^2\right|^2 - \beta(\beta-1)|c_1|^4$$
$$\leq 4 + 4\beta(\beta-1)|c_1|^2 - \beta(\beta-1)|c_1|^4 \leq 4.$$

Batas 4 di dalam ketaksamaan terakhir diperoleh dengan menggunakan kaedah kalkulus. Kesamaan berlaku dalam ketaksamaan terakhir jika dan hanya jika sama ada $|c_1| = 0$ atau $|c_1| = 2$. Jika $|c_1| = 0$, maka $|c_2| = 0$, i.i., $p(z) = (1 + \varepsilon z^3)/(1 - \varepsilon z^3)$, $|\varepsilon| = 1$. Jika $|c_1| = 2$, maka

$p(z) = (1 + \varepsilon z)/(1 - \varepsilon z)$, $|\varepsilon| = 1$. ▯

Lema 4. Jika $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in P$, maka

$$\left|c_3 - (\mu+1)c_1c_2 + \mu c_1^3\right| \leq maks\{2, 2|2\mu - 1|\} = \begin{cases} 2, & 0 \leq \mu \leq 1 \\ 2|2\mu-1|, & selainnya \end{cases}$$

Bukti. Untuk $0 \le \mu \le 1$, ketaksamaan terhasil dari Lema 3 dengan $\delta = \mu$, dan $2\beta = \mu + 1$. Untuk ketaksamaan kedua, pilih $\beta = \mu$, $\gamma = 1$, dan $\delta = \mu$ dalam (8). Oleh sebab $\mu(\mu - 1) > 0$, kita mengambil kesimpulan dari (7) dan (8) bahawa

$$\left|c_3 - (\mu+1)c_1c_2 + \mu c_1^3\right|^2 \le 4 + 4\mu(\mu-1)\left|c_2 - c_1^2\right|^2 \le 4(2\mu-1)^2.$$

3. Batas pekali

Untuk kelas fungsi bak-bintang BB yang besar, R. Nevanlinna pada 1920 [11, hal. 46] telah membuktikan bahawa pekali setiap fungsi $f \in BB$ memenuhi $|a_n| \le n$ untuk $n = 2,3,\Lambda$. Brannan *et al.* [2] telah memperoleh batas terbaik untuk pekali ketiga bagi fungsi-fungsi dalam $BK(\alpha)$. Kita berikan satu bukti alternatif, dan selain itu, menerbitkan anggaran terbaik untuk pekali keempat dalam keputusan di bawah. Pada umumnya, masalah pekali am untuk kelas $BK(\alpha)$ dan $BP(\rho)$ adalah masih lagi terbuka.

Teorem 1. Andaikan $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \Lambda \in BK(\alpha)$. Maka

$$|a_2| \le 2\alpha,$$

dengan kesamaan jika dan hanya jika

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left(\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}\right)^{\alpha}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{9}$$

Selanjutnya

$$|a_3| \le \begin{cases} \alpha, & 0 < \alpha \le \frac{1}{3} \\ 3\alpha^2, & \frac{1}{3} \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

Untuk $\alpha > 1/3$, fungsi-fungsi ekstremum dicirikan oleh (9). Jika $0 < \alpha < 1/3$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left(\frac{1+\varepsilon z^2}{1-\varepsilon z^2}\right)^{\alpha}, \quad |\varepsilon| = 1, \tag{9}$$

manakala jika $\alpha = 1/3$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = p_2(z)^{-\alpha} = \left(\lambda\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z} + (1-\lambda)\frac{1-\varepsilon z}{1+\varepsilon z}\right)^{-\alpha}, \quad |\varepsilon| = 1, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Selain itu,

$$|a_4| \le \begin{cases} \frac{2\alpha}{3}, & 0 < \alpha \le \sqrt{\frac{2}{17}} \\ \frac{2\alpha}{9}\left(17\alpha^2 + 1\right), & \sqrt{\frac{2}{17}} \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

Untuk $\alpha \geq \sqrt{2/17}$, fungsi-fungsi ekstremum diberi oleh (9), manakala untuk $0 < \alpha \leq \sqrt{2/17}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left(\frac{1+\varepsilon z^3}{1-\varepsilon z^3}\right)^{\alpha}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

Bukti. Hubungan berikut diperoleh dari (3):

$$a_2 = \alpha c_1$$

$$a_3 = \frac{\alpha}{2}\left[c_2 - \frac{1-3\alpha}{2}c_1^{\,2}\right]$$

$$a_4 = \frac{\alpha}{3}\left[c_3 + \frac{5\alpha-2}{2}c_1c_2 + \frac{17\alpha^2-15\alpha+4}{12}c_1^{\,3}\right] := \frac{\alpha}{3}E$$

Batas atas $|a_2|$ terhasil disebabkan $|c_1| \leq 2$. Lema 2 dengan $\mu = 1-3\alpha$ menghasilkan batas atas $|a_3|$ serta huraian fungsi-fungsi ekstremum.

Untuk pekali keempat, kita menggunakan Lema 3 dengan $2\beta = (2-5\alpha)/2$ dan $\delta = (17\alpha^2 - 15\alpha + 4)/12$. Syarat untuk β dan δ dipenuhi jika $\alpha \leq \sqrt{2/17}$. Dengan demikian $|a_4| \leq 2\alpha/3$, dengan kesamaan jika dan hanya jika $zf'(z)/f(z) = \left[(1+\varepsilon z^3)/(1-\varepsilon z^3)\right]^{\alpha}$.

Memandangkan bahawa $0 < \delta < 1$, dan $\delta - \beta \geq 0$ membekalkan $\alpha \geq \sqrt{2/17}$, Kololari 1 menghasilkan

$$|E| \leq \left|c_3 - \frac{17\alpha^2-15\alpha+4}{6}c_1c_2 + \frac{17\alpha^2-15\alpha+4}{12}c_1^{\,3}\right| + \frac{17\alpha^2-2}{6}|c_1||c_2| \leq \frac{2}{3}\left(17\alpha^2+1\right)$$

Ini melengkapkan bukti.

Teorem 2. Andaikan $f \in BK(\alpha)$ dan $f^{-1}(w) = w + \gamma_2 w^2 + \gamma_3 w^3 + \Lambda$. Maka

$$|\gamma_2| \leq 2\alpha,$$

dengan kesamaan jika dan hanya jika

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left(\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}\right)^{\alpha}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

Selanjutnya

$$|\gamma_3| \le \begin{cases} \alpha, & 0 < \alpha \le \frac{1}{5} \\ 5\alpha^2, & \frac{1}{5} \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

Untuk $\alpha > 1/5$, fungsi-fungsi ekstremum diberi oleh (9). Jika $0 < \alpha < 1/5$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left(\frac{1+\varepsilon z^2}{1-\varepsilon z^2}\right)^{\alpha}, \quad |\varepsilon| = 1,$$

manakala jika $\alpha = 1/5$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = p_2(z)^{-\alpha} = \left(\lambda\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z} + (1-\lambda)\frac{1-\varepsilon z}{1+\varepsilon z}\right)^{-\alpha}, \quad |\varepsilon| = 1, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Selain itu,

$$|\gamma_4| \le \begin{cases} \frac{2\alpha}{3}, & 0 < \alpha \le \frac{1}{\sqrt{31}} \\ \frac{2\alpha}{9}\left(62\alpha^2 + 1\right), & \frac{1}{\sqrt{31}} \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

Untuk $\alpha \ge 1/\sqrt{31}$, fungsi-fungsi ekstremum diberi oleh (9), manakala untuk $0 < \alpha \le 1/\sqrt{31}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left(\frac{1+\varepsilon z^3}{1-\varepsilon z^3}\right)^{\alpha}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

Bukti. Hubungan-hubungan berikut diperoleh dari (3) dan (4):

$$\gamma_2 = -\alpha c_1$$

$$\gamma_3 = -\frac{\alpha}{2}\left[c_2 - \frac{1+5\alpha}{2}c_1^{\,2}\right] \tag{11}$$

$$\gamma_4 = -\frac{\alpha}{3}\left[c_3 - (1+5\alpha)c_1c_2 + \frac{31\alpha^2 + 15\alpha + 2}{6}c_1^{\,3}\right] := -\frac{\alpha}{3}E$$

Seperti dalam pembuktian sebelum ini, batas atas $|\gamma_2|$ dan $|\gamma_3|$ diperoleh dari ketaksamaan yang diketahui baik $|c_1| \le 2$, dan Lema 2.

Untuk pekali keempat, kita menggunakan Lema 3 dengan $2\beta = 1 + 5\alpha$ dan $\delta = (31\alpha^2 + 15\alpha + 2)/6$. Syarat untuk β dan δ dipenuhi jika $\alpha \le 1/\sqrt{31}$. Justeru $|\gamma_4| \le 2\alpha/3$, dengan kesamaan jika dan hanya jika $zf'(z)/f(z) = \left[(1+\varepsilon z^3)/(1-\varepsilon z^3)\right]^{\alpha}$.

Untuk $1/\sqrt{31} < \alpha \le 1/5$, Koroiari 1 menghasilkan

$$|E| \le \left| c_3 - (1+5\alpha)c_1c_2 + \frac{1+5\alpha}{2}c_1{}^3 \right| + \frac{31\alpha^2 - 1}{6}|c_1|^3 \le \frac{2}{3}\left(62\alpha^2 + 1\right)$$

Tinggallah lagi untuk menentukan anggaran bagi $1/5 < \alpha \le 1$. Merujuk kepada Lema 4 dengan $\mu = 5\alpha$, oleh sebab $31\alpha^2 - 15\alpha + 2 > 0$ pada $(0,1]$, kita mengambil kesimpulan bahawa

$$|E| \le \left|c_3 - (1+5\alpha)c_1c_2 + 5\alpha c_1{}^3\right| + \frac{31\alpha^2 - 15\alpha + 2}{6}|c_1|^3 \le 2(10\alpha - 1) + \frac{4}{3}(31\alpha^2 - 15\alpha + 2)$$
$$= \frac{2}{3}\left(62\alpha^2 + 1\right)$$

Sekarang kita memperkenalkan fungsi-fungsi berikut dalam $BP(\rho)$. Takrifkan $G_n, H, J \in A$ masing-masing sebagai

$$\frac{zG_n'(z)}{G_n(z)} = q(z^{n-1}), \quad \frac{zH'(z)}{H(z)} = q\left(\frac{z(z-r)}{1-rz}\right), \quad \frac{zJ'(z)}{J(z)} = q\left(-\frac{z(z-r)}{1-rz}\right), \quad 0 \le r \le 1.$$

Jelaslah dari (5) bahawa $G_n, H, J \in BP(\rho)$. Dengan menggunakan (6), keputusan berikut dapat dibangunkan dengan kaedah yang sama seperti Teorem 1.

Teorem 3. Andaikan $g(z) = z + b_2z^2 + b_3z^3 + \Lambda \in BP(\rho)$. Maka

$$|b_2| \le \frac{16(1-\rho)}{\pi^2},$$

dengan kesamaan jika dan hanya jika $g = G_2$ atau putarannya. Selanjutnya

$$|b_3| \le \begin{cases} \frac{8(1-\rho)}{\pi^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{16(1-\rho)}{\pi^2}\right) & 0 \le \rho \le 1 - \frac{\pi^2}{48} \\ \frac{8(1-\rho)}{\pi^2}, & 1 - \frac{\pi^2}{48} \le \rho < 1 \end{cases}$$

Untuk $0 \le \rho < 1 - \frac{\pi^2}{48}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $g = G_2$ atau putarannya. Untuk $1 - \frac{\pi^2}{48} < \rho < 1$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $g = G_3$ atau putarannya. Jika $\rho = 1 - \frac{\pi^2}{48}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $g = H$ atau putarannya. Selain itu,

$$|b_4| \le \begin{cases} \frac{16(1-\rho)}{3\pi^2}\left[\frac{128(1-\rho)^2}{\pi^4} + \frac{16(1-\rho)}{\pi^2} + \frac{23}{45}\right], & 0 \le \rho \le 1 + \frac{\pi^2}{16}\left(1 - \sqrt{\frac{89}{45}}\right) \\ \frac{16(1-\rho)}{3\pi^2}, & 1 + \frac{\pi^2}{16}\left(1 - \sqrt{\frac{89}{45}}\right) \le \rho < 1 \end{cases}$$

Kesamaan berlaku di sebelah kanan ketaksamaan di atas dalam ungkapan yang pertama jika dan hanya jika $g = G_2$ atau putarannya, manakala ketaksamaan berlaku bagi ungkapan kedua jika dan hanya jika $g = G_4$ atau putarannya.

4. Fungsian pekali Fekete-Szegö

Teorem 4. Andaikan $f \in BK(\alpha)$ and $f^{-1}(w) = w + \gamma_2 w^2 + \gamma_3 w^3 + \Lambda$. Maka

$$\left|\gamma_3 - t\gamma_2^{\,2}\right| \le \begin{cases} (5-4t)\alpha^2, & t \le \frac{5-1/\alpha}{4} \\ \alpha, & \frac{5-1/\alpha}{4} \le t \le \frac{5+1/\alpha}{4} \\ (4t-5)\alpha^2, & t \ge \frac{5+1/\alpha}{4} \end{cases}$$

Jika $\frac{5-1/\alpha}{4} < t < \frac{5+1/\alpha}{4}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika f diberi oleh (10). Jika $t < \frac{5-1/\alpha}{4}$ atau $t > \frac{5+1/\alpha}{4}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika f diberi oleh (9). Jika $t = \frac{5+1/\alpha}{4}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $\frac{zf'(z)}{f(z)} = p_2(z)^{\alpha}$, manakala jika $t = \frac{5-1/\alpha}{4}$, maka kesamaan berlaku jika dan hanya jika $\frac{zf'(z)}{f(z)} = p_2(z)^{-\alpha}$.

Bukti. Dari (11), diperoleh

$$\gamma_3 - t\gamma_2^{\,2} = -\frac{\alpha}{2}\left[c_2 - \frac{1+(5-4t)\alpha}{2}c_1^{\,2}\right].$$

Keputusan kini dicapai dengan menggunakan Lema 2.

Dengan cara yang serupa, diperoleh penyelesaian lengkap fungsian pekali Fekete-Szegö bagi kelas $BP(\rho)$.

Teorem 5. Andaikan $g(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \Lambda \in BP(\rho)$. Maka

$$\left|b_3 - tb_2^{\,2}\right| \le \begin{cases} \frac{16(1-\rho)}{3\pi^4}\left[24(1-\rho)(1-2t) + \pi^2\right], & t \le \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{96(1-\rho)} \\ \frac{8(1-\rho)}{\pi^2}, & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{96(1-\rho)} \le t \le \frac{1}{2} + \frac{5\pi^2}{96(1-\rho)} \\ \frac{16(1-\rho)}{3\pi^4}\left[24(1-\rho)(2t-1) - \pi^2\right], & t \ge \frac{1}{2} + \frac{5\pi^2}{96(1-\rho)} \end{cases}$$

Jika $\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{96(1-\rho)} < t < \frac{1}{2} + \frac{5\pi^2}{96(1-\rho)}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $g = G_3$ atau satu daripada putarannya. Jika $t < \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{96(1-\rho)}$ atau $t > \frac{1}{2} + \frac{5\pi^2}{96(1-\rho)}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $g = G_2$ atau satu daripada putarannya. Jika $t = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{96(1-\rho)}$, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $g = H$ atau satu daripada putarannya, manakala untuk $t = \frac{1}{2} + \frac{5\pi^2}{96(1-\rho)}$, maka kesamaan berlaku jika dan hanya jika $g = J$ atau satu daripada putarannya.

Akhir sekali, perhatikan bahawa anggaran fungsian pekali Fekete-Szegö boleh juga diguna untuk membangunkan batas atas terbaik bagi pekali kedua dan pekali ketiga kelas berkenaan.

Penghargaan

Penyelidikan ini telah dibiayai melalui Geran Penyelidikan Fundamental Universiti Sains Malaysia.

Rujukan

[1] Ali, R.M. dan Singh, V. (1995). Coefficients of parabolic starlike functions of order ρ, *Comp. Methods Function. Theory,* World Scientific, 23-36.

[2] Brannan, D.A., Clunie, J. dan Kirwan, W.E. (1970). Coefficient estimates for a class of starlike functions, *Canad. J. Math.* **22**, 476-485.

[3] Brannan, D.A. dan Kirwan, W.E. (1969). On some classes of bounded univalent functions, *J. London Math. Soc.* **(2) 1**, 431-443.

[4] Goodman, A.W. (1991). On uniformly convex functions, *Ann. Polon. Math.* **56**, 87-92.

[5] Leverenz, C.R. (1984). Hermitian forms in function theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* **286**, 675-688.

[6] Libera, R.J. dan Zlotkiewicz, E.J. (1982), Early coefficients of the inverse of a regular convex function, *Proc. Amer. Math. Soc.* **85**, 225-230.

[7] Ma, W. dan Minda, D. (1991). An internal geometric characterization of strongly starlike functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A* **45**, 89-97.

[8] Ma, W. dan Minda, D. (1992). A unified treatment of some special classes of univalent functions, *Proc. Conf. on Complex Analysis,* Tianjin, 157-169.

[9] Ma, W. dan Minda, D. (1992). Uniformly convex functions, *Ann. Polon. Math* **57**, 165-175.

[10] Nunokawa, M. dan Owa, S. (2001). On certain conditions for starlikeness, *Southeast Asian Bull. Math.* **25**, 491-494.

[11] Pommerenke, Ch. 1975. *Univalent functions,* Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

[12] Rønning, F. (1993). Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118**, 189-196.

[13] Stankiewicz, J. (1970). Some remarks concerning starlike functions, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* **18**, 143-146.

[14] Stankiewicz, J. (1968/70). On a family of starlike functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A* **22-24**, 175-181.