

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2004/2005

October 2004

MST 564 – STATISTICAL RELIABILITY
[KEBOLEHPERCAYAAN STATISTIK]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **NINE [9]** pages of printed material before you begin the examination.

Answer **all FOUR** questions.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **SEMBILAN [9]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

*Jawab **semua empat** soalan.*

1. (a) Give the definition for the following functions:

- (i) a survivor function
- (ii) the empirical survivor function
- (iii) the conditional survivor function

[20 marks]

(b) Show that the Kaplan-Meier product-limit estimate reduces to the empirical survivor function estimate for a complete data set when the failure times are distinct.

[10 marks]

(c) Show that if an individual has a hazard function $h(t)$, then the survival function of the individual is given by

$$S(t) = e^{-\int_0^t h(u) du}.$$

Hence, show that the probability that an A-year-old individual reaches age B is given by

$$e^{-\int_A^B h(u) du}$$

[20 marks]

(d) The length of times of remission for 11 patients are given as
9, 13, 13+, 18, 23, 28+, 31, 34, 45+, 48, 161+

Complete the following table and sketch the estimated survivor function $\hat{S}(t)$.

Time, t_i	n_i	d_i	c_i	$\hat{h}_i(t)$	$\hat{S}_i(t)$
9	11	1	0	1/11	0.9091
13	10	1	1	1/10	0.8182
18	8	1	0	1/8	0.7159
23					
31					
34					
48					

[20 marks]

(e) The reliability of a cutting tool is given by

$$R(t) = (1 - 0.2t)^2, \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$= 0, \quad t > 5$$

where t is in hours.

- (i) What is the MTTF?
- (ii) How frequently should the tool be changed if failures are to be held to no more than 5%?
- (iii) Is the failure rate decreasing or increasing?

[30 marks]

...3/-

1. (a) Beri definisi bagi fungsi-fungsi berikut:

- (i) Fungsi mandiri
- (ii) Fungsi mandiri empirik
- (iii) Fungsi mandiri bersyarat

[20 markah]

(b) Tunjukkan bahawa penganggar had-hasil darab Kaplan-Meier adalah sama dengan penganggar fungsi mandiri empirik bagi suatu set data lengkap apabila masa kegagalan adalah berbeza.

[10 markah]

(c) Tunjukkan bahawa jika seseorang individu mempunyai kadar bahaya $h(t)$, maka fungsi mandiri bagi individu tersebut ialah

$$S(t) = e^{-\int_0^t h(u) du}$$

Tunjukkan pula bahawa kebarangkalian seseorang individu yang berumur A akan mencapai umur B diberikan oleh

$$e^{-\int_A^B h(u) du}$$

[20 markah]

(d) Pertimbangkan jangka masa 'remission' bagi 11 orang pesakit:

9, 13, 13+, 18, 23, 28+, 31, 34, 45+, 48, 161+

Lengkapkan jadual berikut dan lakarkan anggaran bagi fungsi mandiri, $S(t)$.

Masa, t_i	n_i	d_i	c_i	$\hat{h}_i(t)$	$\hat{S}_i(t)$
9	11	1	0	1/11	0.9091
13	10	1	1	1/10	0.8182
18	8	1	0	1/8	0.7159
23					
31					
34					
48					

[20 markah]

(e) Reliabiliti bagi sebuah alat memotong dihitung mengikut fungsi berikut;

$$R(t) = (1 - 0.2t)^2, \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$= 0, \quad t > 5$$

dengan t dalam unit jam.

- (i) *Apakah MTTF bagi alat ini?*
 (ii) *Berapa kerapkah alat ini harus ditukar sekiranya kegagalan perlu ditetapkan untuk tidak melebihi 5%?*
 (iii) *Adakah kadar kegagalan menyusut atau meningkat?*

[30 markah]

2. (a) The lifetime of a manufactured item is thought to be exponentially distributed. n items are selected and put on test until r of them failed at times $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(r)}$.

- (i) Write down the likelihood function for the experiment and derive the maximum likelihood estimator for the mean. State (without proof) the sampling distribution of this estimator and explain how you would use it to obtain a confidence interval for the mean lifetime.
 (ii) In an experiment with $n = 10$, it was found that seven items failed with failure times 2, 4, 14, 24, 27, 33 and 51 days respectively. Obtain a 95% confidence interval for the mean lifetime of an item.

[40 marks]

- (b) A particular electrical device has a lifetime distribution adequately modeled by an exponential distribution with mean $\theta = 1/\lambda$. In setting up a screening procedure for consignments of these devices, it is decided to institute a type II censored lifetest plan:

Accept $H_0 : \theta = 1000$ with probability 0.9 when $\theta = 1000$ hours and probability 0.05 when $\theta = 300$ hours.

- (i) Show that, in general, if α and β represent the Type I and Type II errors and r denotes the smallest number of lifetimes which must be observed, then

$$\frac{\chi_{2r, 1-\alpha}^2}{\chi_{2r, \beta}^2} = 0.3$$

- (ii) Determine the value of r so that the error rate specifications hold.
 (iii) Determine the value of the constant C so that the decision rule for the test is

$$\text{Reject } H_0 \text{ if } \hat{\theta} \leq C,$$

where $\hat{\theta}$ is the maximum likelihood estimator.

- (iv) Show that the expected time of the r^{th} ordered failure (that is, the expected duration of the plan) is

$$E[T_{(r)}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{n-i+1} \right)$$

[60 marks]

...5/-

2. (a) Masa hayat bagi suatu bahan yang dihasilkan dianggap tertabur secara taburan eksponen. Sebanyak n bahan tersebut dipilih dan diuji sehingga r daripadanya gagal pada masa $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(r)}$.

(i) Tuliskan fungsi kebolehjadian bagi uji kaji ini dan dapatkan penganggar kebolehjadian maksimum bagi min masa hayat. Nyatakan (tanpa bukti) taburan pensampelan bagi penganggar ini dan jelaskan bagaimana anda akan menggunakannya untuk mendapatkan satu selang keyakinan bagi min masa hayat.

(ii) Bagi satu uji kaji dengan $n = 10$, tujuh bahan didapati gagal dan masa kegagalan masing-masing ialah; 2, 4, 14, 24, 27, 33 dan 51 hari. Dapatkan satu selang keyakinan 95% bagi min masa hayat bahan tersebut.

[40 markah]

(b) Satu alat elektrik tertentu mempunyai taburan masa hayat yang mengikut satu taburan eksponen dengan min $\theta = 1/\lambda$. Semasa menyiapkan tatacara penapisan bagi pengiriman alat-alat tersebut, pelan masa hayat tertapis jenis II yang telah dipersetujui ialah:

Terima $H_0: \theta = 1000$ dengan kebarangkalian 0.9 apabila $\theta = 1000$ jam dan dengan kebarangkalian 0.05 apabila $\theta = 300$ jam.

(i) Jika α mewakili ralat Jenis I dan β mewakili ralat Jenis II dan r menandakan bilangan masa hayat terkecil yang perlu dicerap, tunjukkan bahawa

$$\frac{\chi_{2r, 1-\alpha}^2}{\chi_{2r, \beta}^2} = 0.3$$

(ii) Tentukan nilai r supaya kadar ralat adalah tertakluk kepada spesifikasi yang diberi.

(iii) Tentukan nilai pemalar C supaya aturan membuat keputusan bagi ujian ini ialah

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika } \hat{\theta} \leq C,$$

dengan $\hat{\theta}$ merupakan penganggar kebolehjadian maksimum.

(iv) Tunjukkan bahawa jangkakan bagi masa kegagalan ke- r (iaitu, jangkakan jangkamasa bagi pelan ini) ialah

$$E[T_{(r)}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{n-i+1} \right)$$

[60 markah]

3. (a) Consider 5 identical components operating independently and systems i , labelled K_i , constructed as follows:

K_1 consists of components 1 and 2 in series;

K_2 consists of components 3 and 4 in parallel;

K_3 consists of component 5; and

K consists of K_1 , K_2 and K_3 in series.

- (i) Draw a block diagram of the system K .
- (ii) Find the minimal path and minimal cut sets for the system K .
- (iii) Give the structure function of K .
- (iv) Determine the reliability of K , K_1 , K_2 and K_3 if $p_i = P(\text{component } i \text{ operates})$. Name the technique used.

[50 marks]

- (b) Use the method of inclusion and exclusion to compute the upper and lower bounds of the system reliability, $r(p)$, for a 2-out-of-3 system. Assume that all the components are identical. Compare this bound with the exact reliability when $p = 0.5$ and $p = 0.2$.

[30 marks]

- (c) What is the minimum number of identical exponential components, each with a failure rate of $\lambda = 0.0004$ failure per hour, that must be arranged in parallel to yield a mean time to failure of 7000 hours.

[20 marks]

3. (a) *Pertimbangkan 5 komponen secaman yang berfungsi secara tak bersandar dan pertimbangkan sistem i , ditanda dengan K_i , dan digubah seperti berikut:*

K_1 mengandungi komponen 1 dan 2 secara bersiri;

K_2 mengandungi komponen 3 dan 4 secara selari;

K_3 mengandungi komponen 5; dan

K mengandungi K_1 , K_2 dan K_3 secara bersiri.

- (i) *Lukiskan gambarajah blok bagi sistem K .*
- (ii) *Dapatkan set laluan minimal dan set rintangan minimal bagi sistem K .*
- (iii) *Dapatkan fungsi struktur bagi K .*

(iv) Tentukan reliabiliti bagi K , K_1 , K_2 dan K_3 jika $p_i = P(\text{komponen } i \text{ berfungsi})$. Namakan teknik yang diguna untuk mendapat reliabiliti tersebut.

[50 markah]

(b) Guna kaedah 'inclusion and exclusion' untuk menghitung sempadan atas dan sempadan bawah bagi reliabiliti sistem, $r(p)$, bagi suatu sistem 2-daripada-3. Anggapkan bahawa semua komponen adalah secaman. Bandingkan nilai sempadan yang diperolehi dengan nilai reliabiliti tepat apabila $p = 0.5$ dan $p = 0.2$. Nyatakan kesimpulan yang boleh dibuat.

[30 markah]

(c) Apakah bilangan minimum komponen secaman yang tertabur secara eksponen, setiap satu dengan kadar kegagalan $\lambda = 0.0004$ kegagalan setiap jam, yang perlu disusun secara selari untuk mendapat min masa kegagalan sebesar 7000 jam.

[20 markah]

4. (a) In a 10-year follow-up study that was conducted involving people 60 years or older, one research question concerned evaluating the relationship of social support to mortality status. A Cox proportional hazards model was fitted to describe the relationship of a measure of social network to time until death. The social network index was denoted as SNI , and took on integer values between 0 (poor social network) to 5 (excellent social network). Variables to be considered for control in the analysis were AGE (treated continuous), $RACE$ (0, 1) and SEX (0, 1).

(i) State an initial Cox PH model that can be used to assess the relationship of interest, which considers the potential confounding and interaction effects of the AGE , $RACE$, and SEX (assuming no higher than two-factor products involving SNI with AGE , $RACE$, and SEX).

(ii) For your model in part (i), give an expression for the hazard ratio that compares a person with $SNI = 4$ to a person with $SNI = 2$ and the same values of the covariates being controlled.

(iii) Describe how you would test for the interaction using your model in part (i). In particular, state the null hypothesis, the general form of your test statistic, with its distribution and degrees of freedom under your null hypothesis.

- (iv) Assuming a revised model containing no interaction terms, give an expression for a 95% interval estimate for the adjusted hazard ratio comparing a person with $SNI = 4$ to a person with $SNI = 2$ and the same values of the covariates in your model.

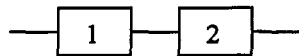
[50 marks]

- (b) Annual inspection and repair are carried out on a large group of smoke detectors of the same design in public buildings. It is found that 15% of the smoke detectors are not functioning. If it is assumed that the failure rate is constant,

- (i) In what fraction of fires will the detectors will offer protection?
 (ii) If the smoke detectors are required to offer protection for at least 99% of fires, how frequently must inspection and repair be carried out?

[25 marks]

- (c) Suppose that in the system shown below, the two components have the same cost, with $p_1 = 0.7$ and $p_2 = 0.95$. If it is permissible to add two components to the system to increase the reliability, would it be preferable to replace component 1 by three components in parallel or to replace components 1 and 2 each by two components in parallel?



[25 marks]

4. (a) *Dalam satu kajian 'follow-up' selama 10 tahun yang dijalankan dengan melibatkan individu berumur 60 tahun ke atas, satu soalan kajian adalah berkaitan dengan penilaian perhubungan sokongan sosial dengan status kematian. Satu model kadaran bahaya Cox telah disuaikan untuk menerangkan hubungan tahap jaringan sosial dengan masa kematian. Indeks jaringan sosial ditandakan sebagai SNI, dan mengambil nilai integer di antara 0 (jaringan sosial yang lemah) hingga 5 (jaringan sosial yang kuat). Pemboleh ubah yang dipertimbangkan sebagai kawalan dalam analisis adalah AGE (dianggap selanjar), RACE (0, 1) and SEX (0, 1).*

- (i) *Nyatakan suatu model PH Cox permulaan yang boleh diguna untuk menilai hubungan yang diminati, yang mempertimbangkan potensi kesan pembauran dan kesan saling tindak AGE, RACE, dan SEX (dengan menganggap tiada hasil yang lebih tinggi dari dua-faktor yang melibatkan SNI dengan AGE, RACE, dan SEX).*

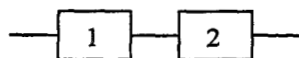
- (ii) Bagi model anda di bahagian (i), berikan satu ungkapan untuk nisbah bahaya yang membandingkan seseorang yang mempunyai nilai $SNI = 4$ dengan seseorang yang mempunyai nilai $SNI = 2$ dan nilai yang sama bagi kovariat yang dianggap sebagai kawalan.
- (iii) Terangkan bagaimana anda akan menjalankan ujian bagi saling tindak dengan menggunakan model di bahagian (i). Nyatakan hipotesis nol, bentuk am bagi statistik ujian anda, dengan taburannya dan darjah kebebasan di bawah hipotesis nol.
- (iv) Dengan mempertimbangkan model yang telah disepakati dan tidak mengandungi sebutan saling tindak, dapatkan ungkapan bagi satu anggaran selang 95% bagi nisbah bahaya yang membandingkan seorang individu yang mempunyai nilai $SNI = 4$ dengan seorang individu yang mempunyai nilai $SNI = 2$ dan nilai yang sama bagi kovariat yang lain dalam model anda.

[50 markah]

- (b) Pemeriksaan tahunan dan pembaikan telah dijalankan terhadap satu kumpulan pengesan asap yang berbentuk serupa dalam sesebuah bangunan. Semasa pemeriksaan dijalankan, didapati 15% daripada pengesan asap tersebut adalah tidak berfungsi. Sekiranya diandaikan bahawa kadar kegagalan adalah malar,
- (i) Dapatkan pecahan kebakaran yang akan diberi perlindungan oleh pengesan tersebut.
- (iii) Jika pengesan asap tersebut diperlukan memberi perlindungan bagi sekurang-kurangnya 99% kebakaran, berapa kerapkah pemeriksaan dan pembaikan mesti dilakukan?

[25 markah]

- (c) Andaikan bahawa sistem yang ditunjukkan di bawah terdiri daripada dua komponen yang mempunyai kos yang sama, dengan $p_1 = 0.7$ dan $p_2 = 0.95$. Jika dua lagi komponen perlu ditambah kepada sistem ini untuk meningkatkan reliabiliti, adakah lebih baik mengganti komponen 1 dengan tiga komponen secara selari atau mengganti komponen 1 dan komponen 2 dengan dua komponen selari bagi setiap komponen.



[25 markah]