UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2004/2005

October 2004

MST 562 – STOCHASTIC PROCESSES
[PROSES STOKASTIK]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **EIGHT** pages of printed material before begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LAPAN** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Answer **all FOUR** questions. All questions carry the same marks.

*Jawab **semua EMPAT** soalan. Semua soalan membawa jumlah markah yang sama.*

1. (a) Let X have a Poisson distribution with parameter $\lambda > 0$. Suppose λ itself is random, having an exponential density function with parameter θ.

   (i) What is the marginal distribution of X?
   (ii) Determine the conditional density for λ given $X = k$.
   (iii) Suppose we have another random variable Y having the same distribution as X and they are independent. What is the conditional distribution for X given that $X + Y = n$?

[30 marks]

(b) Let X be the number of failures needed to obtain the first success in a sequence of independent Bernoulli trials with probability of p of obtaining a success in a single trial.

   (i) Find the probability generating function of X.
   (ii) Using the result in (i), obtain $E[X]$ and $Var[X]$.

[30 marks]

(c) Assume that a piece of equipment contains two key components. Let X_1 and X_2 denote their respective lifetimes and assume that the two lifetimes are independent and follow exponential distributions with respective parameters μ_1 and μ_2. If one component fails, then the equipment fails, the equipment lifetime is given by

$$X = \min\{X_1, X_2\}$$

   (i) Find the Laplace transform of X_1.
   (ii) What is the probability distribution of X?
   (iii) Using the Laplace transform of X, find $E[X]$ and $Var[X]$.

[40 marks]

1. (a) Katakan X mempunyai taburan Poisson dengan parameter $\lambda = 0$. Juga, λ adalah rawak, tertabur eksponen dengan parameter θ.

   (i) Apakah taburan sut bagi X?
   (ii) Tentukan taburan bersyarat bagi λ diberi $X = k$.
   (iii) Terdapat satu lagi pemboleh ubah rawak Y yang tertabur sama seperti X dan tak bersandar antara satu sama lain. Apakah taburan bersyarat bagi X diberi $X + Y = n$?

[30 markah]

(b) X adalah bilangan kegagalan yang diperlukan untuk mendapat kejayaan pertama dalam suatu jujukan cubaan Bernoulli tak bersandar dengan kebarangkalian p untuk memperolehi kejayaan dalam satu cubaan tunggal.

   (i) Dapatkan fungsi penjana kebarangkalian bagi X.
   (ii) Dengan menggunakan keputusan di (i), dapatkan $E[X]$ dan $Var[X]$.

[30 markah]

(*c*) *Andaikan bahawa suatu alat terdiri dari 2 komponen utama. Katakan* X_1 *dan* X_2 *adalah masahayat masing-masing dan andaikan kedua-duanya tak bersandar dan tertabur secara eksponen dengan parameter* μ_1 *dan* μ_2. *Jika satu komponen gagal, maka alat ini tidak berfungsi. Masahayat alat ini diberi oleh*

$$X = \min\{X_1, X_2\}$$

(*i*) *Dapatkan jelmaan Laplace bagi* X_1.
(*ii*) *Apakah taburan kebarangkalian bagi* X ?
(*iii*) *Dengan menggunakan jelmaan Laplace bagi* X, *cari* $E[X]$ *dan* $Var[X]$.

[40 markah]

2. (a) Let W_n denote a random variable with mean μ and variance $\dfrac{b}{n^p}$ where $p > 0$, μ and b are constants. Prove that W_n converges in probability to μ.

[30 marks]

(b) Three boys A, B and C are playing table tennis. In each game, two of the boys play against each other and the third boy does not play. The winner of any given game n plays again in game $n+1$ against the boy who did not play in game n, and the loser of game n does not play in game $n+1$. The probability that A will beat B in any game that they play against each other is 0.3; the probability that A will beat C is 0.6; and the probability that B will beat C is 0.8.

(i) Represent this process as a Markov chain with stationary transition probabilities and construct the transition matrix.
(ii) Determine the probability that the two boys who play against each other in the first game will play against each other again in the fourth game.
(iii) Does the probability in (ii) depend on which two boys play in the first game? Explain.

[40 marks]

(c) Briefly explain the concepts of :

(i) independent increments.
(ii) stationary processes.
(iii) recurrent and transient.

[30 marks]

2. (*a*) W_n *adalah suatu pemboleh ubah rawak dengan min* μ *dan varians* $\dfrac{b}{n^p}$ *dengan* $p > 0$, μ *dan* b *adalah pemalar. Buktikan bahawa* W_n *menumpu dalam kebarangkalian ke* μ.

[30 markah]

(b) *Tiga orang kanak-kanak lelaki A, B dan C bermain ping pong. Dalam setiap permainan, dua daripada mereka akan bermain dan budak ketiga tidak bermain. Pemenang bagai mana-mana permainan n akan bermain semula dalam permainan* $n+1$ *melawan budak yang tidak bermain dalam permainan* n, *dan budak yang kalah dalam permainan n tidak akan bermain dalam permainan* $n+1$. *Kebarangkalian bahawa A akan kalahkan B dalam mana-mana permainan yang mereka bermain ialah 0.3, kebarangkalian bahawa A akan kalahkan C ialah 0.6 dan kebarangkalian bahawa B akan kalahkan C ialah 0.8.*

(i) *Tunjukkan proses ini sebagai rantai Markav dengan kebarangkalian peralihan matriks dan bina matriks peralihannya.*
(ii) *Tentukan kebarangkalian bahawa dua orang kanak-kanak yang bermain dalam permainan pertama akan bermain semula dalam permainan keempat.*
(iii) *Adakah kerangkalian di (ii) bergantung kepada dua kanak-kanak yang bermain di permainan pertama? Terangkan.*

[40 markah]

(c) *Secara ringkas, huraikan konsep-konsep berikut :*

(i) *tokokan tak bersandar.*
(ii) *proses pegun.*
(iii) *jadi semula dan fana.*

[30 markah]

3. (a) A particle moves among the states 0, 1, 2 according to a Markov process whose transition probability matrix is

$$\begin{vmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{vmatrix}$$

Let X_n denote the position of the particle at the n^{th} move.

(i) Calculate $P(X_n = 0 \mid X_0 = 0)$ for $n = 0, 1, 2, 3$.
(ii) If the probability distribution of the initial states is equal for all states, calculate $P(X_2 = 0)$.

[25 marks]

(b) Consider a Markov chain with state space $S = \{0, 1, \cdots\}$ and transition probability matrix P given by

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 & . & . & . \\ q & 0 & p & 0 & . & . \\ 0 & q & 0 & p & 0 & . \\ . & 0 & q & 0 & p & . \\ & & & & . & . \\ & & & & . & . \end{vmatrix}$$

where $p>0, q>0, q>p$, and $p+q=1$.

(i) Give the name of the process that possesses this transition matrix. Describe the process.
(ii) Determine the class of states.
(iii) Determine the period of the chain.

[40 marks]

(c) Suppose that the social class of successive generations in a family follow a Markov chain with transition probability matrix given by

		Son's Class		
		Lower	Middle	Upper
Father's Class	Lower	0.7	0.2	0.1
	Middle	0.2	0.6	0.2
	Upper	0.1	0.4	0.5

What fractions of families are in the upper class in the long run?

[15 marks]

(d) Briefly explain three types of branching processes and their probabilities of non-extinction.

[20 marks]

3. *(a) Suatu partikel bergerak di keadaan* $0,1,2$ *menurut proses Markov yang mempunyai matriks kebarangkalian peralihan berikut :*

$$\begin{vmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{vmatrix}$$

X_n *adalah keadaan partikel pada gerakan ke-*n

(i) Kirakan $P(X_n=0\,|\,X_0=0)$ *bagi* $n=0,1,2,3$.

(ii) Jika taburan kebarangkalian permulaan bagi semua keadaan adalah sama, kirakan $P(X_2=0)$.

[25 markah]

(b) *Pertimbangkan suatu rantai Markov dengan ruang keadaan* $S = \{0, 1, \cdots\}$ *dan matriks kebarangkalian peralihan P diberi sebagai*

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 & . & . & . \\ q & 0 & p & 0 & . & . \\ 0 & q & 0 & p & 0 & . \\ . & 0 & q & 0 & p & . \\ & & & & . & . \\ & & & & . & . \end{vmatrix}$$

yang mana $p > 0, q > 0, q > p$, *dan* $p + q = 1$.

(i) *Berikan nama proses yang mempunyai matriks peralihan ini. Huraikan.*
(ii) *Tentukan kelas keadaannya.*
(iii) *Tentukan kala rantai ini.*

[40 markah]

(c) *Katakan bahawa kelas sosial generasi seterusnya bagi suatu keluarga adalah rantai Markov dengan matriks kebarangkalian peralihan seperti berikut :*

		Kelas Anak		
		Bawah	Pertengahan	Atas
Kelas	Bawah	0.7	0.2	0.1
Bapa	Pertengahan	0.2	0.6	0.2
	Atas	0.1	0.4	0.5

Apakah pecahan keluarga yang berada pada kelas atasan dalam jangkamasa panjang?

[15 markah]

(d) *Secara ringkas, terangkan tiga jenis proses bercabang dan kebarangkalian ketakpupusan masing-masing.*

[20 markah]

4. (a) The stochastic branching process $\{S_n, n \geq 0\}$ is defined as

$$S_n = \begin{cases} S_{n,1} + \cdots + S_{n,S_{n-1}} & \text{if} \quad S_{n-1} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $S_0 = 1$, $\{S_{n,1}, \cdots, S_{n,S_{n-1}}\}$ are i.i.d random variables with a common distribution $\{P_k\}$, mean μ and variance σ^2. Find $E[S_n]$ and $\mathrm{Var}[S_n]$ in term of μ, σ^2 and n.

[20 marks]

(b) $\{N_i(t), t \geq 0\}$ are independent Poisson processes with rate $\lambda_i, i = 1, 2$.

(i) Show that if $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, then $\{N(t), t \geq 0\}$ is a Poisson process with rate $\lambda_1 + \lambda_2$.

(ii) What is the probability that the first event of the combined process is from the N_1 process?

[20 marks]

(c) Events occur according to a Poisson process with rate $\lambda = 2$ per hour.

(i) What is the probability that no event occurs between 8 p.m. and 9 p.m.?

(ii) Starting at noon, what is the expected time at which the fourth event occurs?

(iii) What is the probability that two or move events occur between 6 p.m. and 8 p.m.?

(iv) What is the probability that the elapsed time between the 5^{th} and 6^{th} events exceeds 1 hours?

[30 marks]

(d) (i) Consider a barber shop with two barbers and two chairs for the customers to sit while waiting for their turn. Customers arrive at a rate of 5 per hour. Each barber serves customers at a rate of two per hour. Customers arriving to a fully occupied shop leave without being served. When the shop opens at 8 a.m., there are already two waiting customers. We assume that arrivals are Poisson and service times are exponential and the arrival process is independent of service times. Let $X(t)$ represent the state of the system at time t. Argue what process can model $X(t)$. Explain the rates involved.

(ii) Let $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ be a standard Brownian motion process. For all $t \geq 0$, and one fixed $s \geq 0$, we define $Y(t) = Z(t+s) - Z(s)$. Show that $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ is also a standard Brownian motion.

[30 marks]

4. (a) *Proses bercabang stokastik* $\{S_n, n \geq 0\}$ *ditakrifkan sebagai*

$$S_n = \begin{cases} S_{n,1} + \cdots + S_{n,S_{n-1}} & \textit{jika} \quad S_{n-1} > 0 \\ & \textit{sebaliknya} \end{cases}$$

yang mana $S_0 = 1$, $\{S_{n,1},\cdots,S_{n,S_{n-1}}\}$ *adalah pembolehubah rawak i.i.d dengan taburan sepunya* $\{P_k\}$, *min* μ, *dan varians* σ^2. *Cari* $E[S_n]$ *dan* $Var[S_n]$ *dalam sebutan* μ, σ^2 *dan n.*

[20 markah]

(b) $\{N_i(t), t \geq 0\}$ *adalah proses Poisson tak bersandar dengan kadar* $\lambda_i, i = 1,2$.

(i) *Tunjukkan bahawa jika* $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, *maka* $\{N(t), t \geq 0\}$ *adalah proses Poisson dengan kadar* $\lambda_1 + \lambda_2$.

(ii) *Apakah kebarangkalian bahawa peristiwa pertama bagi kedua-dua proses bercantum adalah dari proses* N_1 ?

[20 markah]

(c) *Peristiwa berlaku mengikut suatu proses Poisson dengan kadar* $\lambda = 2$ *sejam.*

(i) *Apakah kebarangkalian bahawa tiada peristiwa berlaku antara 8 malam dan 9 malam?*

(ii) *Bermula waktu tengahari, apakah masa jangkaan bagi peristiwa keempat berlaku?*

(iii) *Apakah kebarangkalian bahawa 2 atau lebih peristiwa berlaku antara 6 petang dan 8 malam?*

(iv) *Apakah kebarangkalian bahawa masa elaps antara peristiwa ke lima dan ke enam melebihi 1 jam?*

[30 markah]

(d) (i) *Pertimbangkan kedai gunting rambut dengan 2 pekerja dan dua kerusi untuk pelanggan yang sedang menunggu. Pelanggan tiba pada kadar 5 orang sejam. Setiap pekerja melayan pelanggan pada kadar 2 orang sejam. Pelanggan yang tiba dan mendapati kedai penuh akan balik. Apabila kedai dibuka pada 8 pagi, sudah terdapat dua pelanggan menunggu. Kita andaikan bahawa ketibaan adalah Poisson dan masa layanan adalah eksponen dan proses ketibaan dan masa layanan adalah tak bersandar. Katakan* $X(t)$ *adalah keadaan bagi sistem pada masa* t. *Bincangkan proses yang boleh memodelkan* $X(t)$. *Juga, terangkan kadar-kadar yang terlibat.*

(ii) *Katakan* $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ *adalah proses gerakan Brown piawai. Bagi semua* $t \geq 0$, *dan beberapa s tetap,* $s \geq 0$, *ditakrifkan* $Y(t) = Z(t+s) - Z(s)$. *Tunjukkan bahawa* $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ *juga adalah gerakan Brown piawai.*

[30 markah]

-oooOooo-