UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

MSS 301- ANALISIS KOMPLEKS

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA [3]** soalan di dalam **LIMA [5]** halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Cari dalam bentuk Cartesan semua nilai $(i-1)^{1/2}$.

(b) Dengan menggunakan takrif, tunjukkan fungsi $f(z) = Kh(3z+1)$ tak terbezakan pada setiap z.

(c) Nombor kompleks z ialah pasangan bertertib $z = (a,b)$. Dengan $i = (0,1)$ dan dengan menggunakan operasi hasil tambah dan hasil darab pada satah kompleks, tunjukkan setiap nombor kompleks z dapat diungkapkan dalam bentuk Cartesan $z = a + ib$.

(d) Andaikan K ialah lengkung $z(t) = z_0 + je^{it}$, $a \le t \le b$. Tunjukkan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{dz}{z - z_0} = \frac{b-a}{2\pi}.$$

Deduksikan nilai ungkapan ini ialah satu integer jika dan hanya jika K adalah tertutup.

(e) Dapatkan dalam bentuk Cartesan semua punca bagi persamaan $z^3 = i$. Tunjukkan punca-punca tersebut membentuk bucu-bucu segi tiga sama sisi yang terterap di dalam bulatan unit berpusat di asalan. Lakarkan pada rajah yang sama segi tiga dan bulatan tersebut.

Pada amnya, punca-punca persamaan $z^n = i$, n integer positif, membentuk bucu-bucu satu poligon sekata $n-$sisi yang terterap di dalam bulatan unit di asalan. Berikan penjelasan hal ini.

(100 markah)

2. (a) Selesaikan persamaan $\cos z = 2i$ dengan meninggalkan jawapan dalam bentuk Cartesan.

(b) Tentukan di mana fungsi

$$f(z) = f(x+iy) = x^3 + 3xy^2 - 3x + i(y^3 + 3x^2y - 3y)$$

adalah terbezakan dan analisis. Dapatkan terbitan fungsi f jika wujud.

(c) Lakarkan set $A = \{z = x+iy : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \pi\}$ dan set $B = \{w : 1 \le |w| \le e^2, Kh\ w \ge 0\}$. Tunjukkan fungsi $w = e^z$ memetakan A secara satu dengan satu dan keseluruh B.

(d) Jika $u = u(x, y)$ adalah harmonik pada setiap $z = (x, y)$ dalam domain D, tunjukkan bahawa $g(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$ adalah analisis pada D. Jika $u(x, y) = xy - x + y$, dapatkan fungsi analisis f supaya $f'(z) = g(z)$, iaitu, dapatkan fungsi konjugat harmonik u.

(e) Andaikan fungsi $w = f(z)$ adalah analisis pada titik z_0 dan $f'(z_0) \neq 0$. Tunjukkan

(i) $\displaystyle \mathop{had}_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$, dan

(ii) $\displaystyle \mathop{had}_{z \to z_0} \{huj[f(z) - f(z_0)] - huj[z - z_0]\} = huj\ f'(z_0)$.

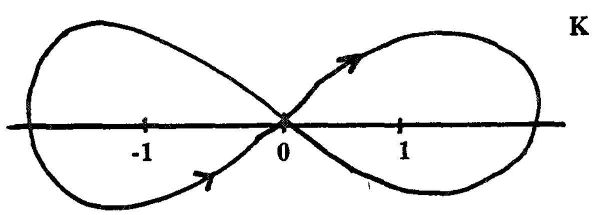
Justeru, untuk z berhampiran dengan z_0, dan $w_0 = f(z_0)$, apakah anggaran nilai $|w - w_0|$ dan $huj\,(w - w_0)$? (Pembayang: Kesimpulan (i) dan (ii) menunjukkan bahawa $w = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ untuk z berhampiran z_0.)

(100 markah)

3. (a) Nilaikan setiap kamiran berikut:

(i) $\displaystyle \int_B \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz$, dengan B sebagai bulatan berarah positif $|z| = 2$.

(ii) $\displaystyle \int_K \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz$, dengan kontur K seperti yang digambarkan:



(iii) $\displaystyle \int_B \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}\,dz$, dengan B sebagai bulatan berarah positif $|z| = 2$.

(b) Tunjukkan cabang prinsipal $\log(z^2+1)$ mempunyai potongan cabang $\{z = x+iy : x = 0,\ y^2 \geq 1\}$. Justeru, cabang prinsipal $(z^2+1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}Log(z^2+1)}$ adalah analisis pada cakera unit $|z| < 1$, tetapi tak analisis pada $|z| > 1$. Dapatkan cabang $(z^2+1)^{1/2}$ yang analisis pada domain $|z| > 1$.

(c) Andaikan a dan b ialah pemalar nyata. Cari nilai maksimum $|az^n + b|$, n integer positif, pada cakera $|z| \leq j$. Tentukan semua titik z di mana nilai maksimum tersebut dicapai.

(d) Andaikan fungsi f adalah analisis pada cakera terbuka $|z| < J$, dan perwakilan siri f ialah

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < J.$$

Dengan menggunakan rumus kamiran Cauchy untuk terbitan, tunjukkan bahawa

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{n+1}} d\varsigma,$$

dengan K sebagai suatu kontur tertutup ringkas berarah positif di dalam cakera tersebut. Justeru, jika $|f(z)| \leq M(j)$ untuk $|z| = j < J$, tunjukkan bahawa

$$|a_n| \leq \frac{M(j)}{j^n}. \tag{1}$$

Tunjukkan juga bahawa

(i) $$|f(je^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \bar{a}_m j^{n+m} e^{i(n-m)\theta}$$

(ii) $$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi, & n = m \end{cases}$$

Oleh sebab penumpuan siri adalah secara seragam, dan dengan itu, dibolehkan pengamiran secara sebutan demi sebutan, deduksikan daripada (i) dan (ii) bahawa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\, f(je^{i\theta})\,|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n \,|^2 \, j^{2n}.$$

Justeru, jika $|\, f(z)\,| \leq M(j)$ untuk $|\, z\,| = j < J$, tunjukkan bahawa

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n \,|^2 \, j^{2n} \leq M^2(j). \qquad (2)$$

Daripada persamaan (1) dan (2) di atas, deduksikan bahawa $|\, a_m \,|\, j^m = M(j)$ untuk sesuatu integer positif m jika dan hanya jika fungsi f berbentuk $f(z) = a_m z^m$.

(120 markah)

-oooOOOooo-