UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MSS 301 – ANALISIS KOMPLEKS

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua tiga** soalan.

1. (a) Nombor kompleks z ialah pasangan bertertib $z=(a,b)$. Dengan $i=(0,1)$ dan dengan menggunakan operasi hasil tambah dan hasil darab pada satah kompleks, tunjukkan setiap nombor kompleks z dapat diungkapkan dalam bentuk Cartesan $z=a+ib$.

Tunjukkan satah kompleks C tidak mempunyai subset tak kosong C^+ dengan sifat-sifat berikut:

(i) $z+w\in C^+$ jika $z,w\in C^+$,

(ii) $zw\in C^+$ jika $z,w\in C^+$,

(iii) untuk $z\in C$, hanya satu daripada pernyataan berikut adalah benar:

$$z=0,\quad z\in \mathrm{C}^+,\ \text{atau}\ -z\in \mathrm{C}^+.$$

(b) Dengan menggunakan takrif, tunjukkan fungsi $f(z)=\bar{z}+2z$ tak terbezakan di setiap nombor.

(c) Tunjukkan $\cos(iz)=\cosh z$. Deduksikan bahawa fungsi $w=\cos z$ adalah tak terbatas.

Selesaikan persamaan $\cos z=-2i$ dengan meninggalkan jawapan dalam bentuk Cartesan.

(d) Andaikan fungsi $w=f(z)$ adalah selanjar pada lengkok licin L. Tunjukkan nilai kamiran

$$\int_L f(z)\,dz$$

tak bersandar kepada persamaan parameter L, iaitu, jika $z=z(t)$ $(a\le t\le b)$ dan $z=z(s)$ $(c\le s\le d)$ mencirikan lengkok L, maka

$$\int_a^b f\big(z(t)\big)\,z'(t)\,dt=\int_c^d f\big(z(s)\big)\,z'(s)\,ds.$$

Jika B ialah bulatan unit berarah positif $z=e^{it}$, $-\pi\le t\le\pi$, dan a pemalar nyata, tunjukkan

$$\oint_B \frac{e^{az}}{z}\,dz=2\pi i.$$

Deduksikan nilai $\int_0^{\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)\,dt$.

[100 markah]

2. (a) Cari dalam bentuk Cartesan semua nilai $(-1-2i)^{1/2}$.

Dapatkan dalam bentuk Cartesan semua punca persamaan $z^4 = -1$. Tunjukkan punca-punca tersebut menbentuk bucu-bucu segi empat sama yang terterap di dalam bulatan unit berpusat di asalan. Lakarkan pada rajah yang sama segi empat sama dan bulatan tersebut.

(b) Tentukan di mana fungsi

$$f(z) = f(x+iy) = x^3 + iy^3 - 3$$

adalah terbezakan dan analisis. Dapatkan terbitan fungsi f jika wujud.

Jika fungsi analisis f bersifat $Ny\, f(z) = k$ untuk setiap z dalam domain D, k pemalar, tunjukkan fungsi f adalah malar. Umumnya, jika fungsi analisis $w = f(z)$ memetakan domain D keseluruh suatu bahagian garis, tunjukkan fungsi f adalah malar pada D.

(c) Jika $u(x,y) = 2x\,(2-y)$, dapatkan fungsi konjugat harmonik u.

(d) Dapatkan cabang $\log\,(z^2-1)$ yang analisis pada $z=0$ dengan nilai $3\pi i$ di situ.

Dapatkan cabang $(z^2-1)^{1/2}$ yang analisis pada domain $|z| > 1$.

[100 markah]

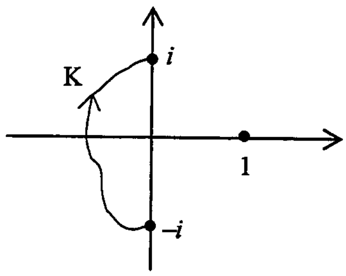
3. (a) Andaikan $w = f(z)$ fungsi seluruh dan $f^{(3)}$ adalah terbatas pada satah kompleks. Tunjukkan fungsi f berbentuk $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$, $a_i \in C$.

(b) Nilaikan setiap kamiran berikut:

(i) $\oint_B \dfrac{ze^z}{2z-3}\,dz$, dengan B sebagai bulatan berarah positif $|z| = 2$.

(ii) $\oint_B \dfrac{\sin z}{z^4}\,dz$, dengan B sebagai bulatan berarah positif $|z| = 1$.

(iii) $\int_K \frac{1}{z-1}dz$, dengan kontur K seperti yang digambarkan:



Nilaikan $\oint_K \frac{1}{z-1}dz$ jika K ialah kontur tertutup ringkas berarah positif yang mengelilingi nombor 1.

(iv) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}$, $0<\alpha<1$.

(c) Cari tiga perwakilan siri Laurent bagi fungsi

$$f(z)=\frac{2(z-1)}{z^2-2z-3}$$

dalam kuasa z.

[100 markah]

- ooo O ooo -