

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

**MSS 211 – ALJABAR MODEN**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua sembilan** soalan.

...2/-

1. Diberikan  $A$ ,  $B$  dan  $C$  merupakan set-set. Buktikan atau sangkalkan pernyataan berikut:

$$A \subseteq B \text{ dan } A \cap C = \phi \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (B \cap C) = A.$$

[6 markah]

2. (a) Nyatakan takrif bagi yang berikut :

(i) Hubungan. (ii) Hubungan kesetaraan.

- (b) Diberikan  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  dan

$$K = \{(1,1), (2,2), (3,3), (5,5), (1,3), (1,4), (2,5), (4,1), (3,1)\}$$

- (i) Tentukan sama ada  $K$  suatu hubungan atas  $A$ .  
 (ii) Tentukan sama ada  $K$  suatu hubungan kesetaraan atas  $A$ .  
 (iii) Berikan set terkecil mungkin  $S$  supaya  $K-S$  merupakan suatu hubungan atas  $A$ .  
 (iv) Berikan set terkecil mungkin  $R$  supaya  $K \cup R$  merupakan suatu hubungan kesetaraan atas  $A$ .  
 (v) Cari set hasil bahagi untuk  $K \cup R$ .

[12 markah]

3. (a) Nyatakan takrif bagi yang berikut :

(i) Fungsi. (ii) Fungsi satu-ke-satu.  
 (iii) Fungsi keseluruhan. (iv) Fungsi tersongsangkan.

- (b) Buktikan teorem berikut :  
 Suatu fungsi  $f$  tersongsangkan jika dan hanya jika  $f$  satu-ke-satu dan keseluruhan.

[12 markah]

4. Takrifkan operasi  $*$  atas  $\mathbb{R}$  sebagai

$$a * b = a + b + ab$$

Tentukan sama ada

- (i)  $*$  suatu operasi dedua atas  $\mathbb{R}$ .  
 (ii)  $*$  kalis sekutuan atau kalis tukar tertib.

...3/-

(iii)  $\langle \mathbb{R}, * \rangle$  suatu kumpulan.

[10 markah]

5. (a) Diberikan teorem :  
 " $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  dan  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$  dengan  $[a, n] = 1$ ,  $\exists x \in \mathbb{Z}$  supaya  $ax \equiv b \pmod{n}$ ."  
 Tentusahkan teorem di atas untuk kes  $n = 6$  dan setiap  
 $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  yang memenuhi syarat  $[a, n] = 1$ .

(b) Diberikan  $Z_p^* = Z_p - \{[0]\}$  dan  $\otimes$  merupakan operasi pendaraban kongruen modulo  $p$ . Buktikan bahawa  $\langle Z_p^*, \otimes \rangle$  merupakan suatu kumpulan bila  $p$  suatu nombor perdana.  
 [Nota :  $[a, n]$  merupakan notasi bagi faktor sepunya terbesar bagi integer-integer  $a$  dan  $n$ .]

[16 markah]

6. Diberikan  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  dan  $f, g, h$  fungsi-fungsi dari  $A$  ke  $A$  dengan  
 $1f=3, 2f=5, 3f=2, 4f=6, 5f=1, 6f=4, 7f=7,$   
 $1g=2, 2g=3, 3g=5, 4g=7, 5g=3, 6g=4, 7g=6,$   
 $1h=6, 2h=7, 3h=3, 4h=4, 5h=1, 6h=2, 7h=5,$

(a) Yang manakah di antara  $f, g$  dan  $h$  yang merupakan suatu

(i) pilihatur atas  $A$ ?

(ii) pilihatur genap, pilihatur ganjil?

(iii) kitar?

(b) Tuliskan  $f, g$  dan  $h$  sebagai hasil darab transposisi-transposisi jika mungkin.

(c) Nilaikan yang berikut

(i)  $f^{15}$

(ii)  $f^5 \circ g^3$

(iii)  $f^3 \circ h^5$

[12 markah]

7. Cari semua unsur dalam  $\langle (1234), (13) \rangle$ .

[10 markah]

8. (a) Nyatakan takrif-takrif bagi subkumpulan serta subkumpulan normal bagi suatu kumpulan.

(b) Diberikan  $G$  suatu kumpulan dan  $H, K$  kedua-duanya subkumpulan normal bagi  $G$ . Tunjukkan bahawa  $H \cap K$  juga suatu subkumpulan normal bagi  $G$ .

[10 markah]

...4/-

9. (a) Nyatakan taktif isomorfisma kumpulan.

(b) Berikan  $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \rangle$  dan

$$H = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, 1 \right\}.$$

Tentukan yang mana di antara  $\langle G, \circ \rangle$ ,  $\langle H, \times \rangle$  dan  $\langle S_3, \circ \rangle$  yang saling berisomorfisma.

[12 markah]