UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

MSS 211 – ALJABAR MODEN

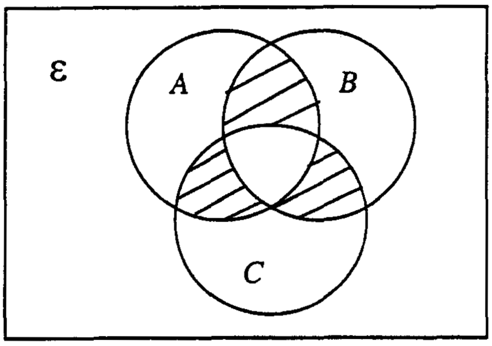
Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

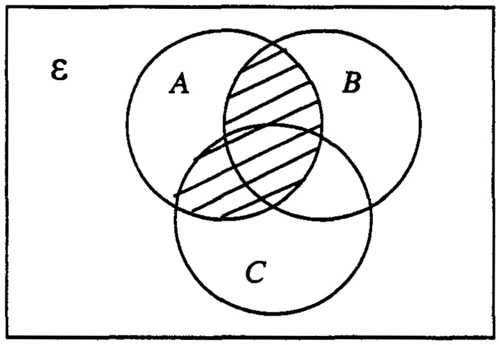
Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH [7]** soalan di dalam **TIGA [3]** halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. Diberikan set semesta $\mathcal{E}$ yang mengandungi set-set A, B dan C seperti dalam dua gambarajah Venn berikut:



Rajah 1



Rajah 2

(i) Takrifkan kawasan berlorek dalam Rajah 1 dan Rajah 2 masing-masing.

(ii) Berikan satu contoh yang dapat menunjukkan bahawa secara amnya kawasan-kawasan berlorek di atas tidak sama.

(iii) Nyatakan satu syarat yang perlu dan cukup supaya kedua-dua kawasan di atas sama. Buktikan pernyataan anda.

[15 markah]

2. Nyatakan takrif bagi yang berikut:

(i) Hubungan

(ii) Hubungan refleksif

(iii) Hubungan simetri

(iv) Hubungan transitif

(v) Fungsi

(vi) Operasi dedua

(vii) Kumpulan

[16 markah]

3. Diberikan G suatu set dan $*$ suatu operasi dedua atas G. Jika wujud kedua-dua identiti kanan dan identiti kiri untuk $*$ dalam G, buktikan keunikan setiap daripadanya. Seterusya, tentukan kewujudan unsur identiti untuk $*$.

[12 markah]

4. Diberikan $A=\{1,2,3,4,5\}$, I_A = fungsi identiti atas A, dan $H=\{f:A\rightarrow A \mid f$ satu-ke-satu, $f^2 = I_A\}$.

   (i) Senaraikan semua unsur dalam H.

   (ii) Diberikan $S_5 = \{f:A\rightarrow A \mid f \text{ satu-ke-satu}\}$, nyatakan bilangan unsur dalam S_5. Seterusnya, tentukan sama ada H suatu subkumpulan S_5.

   (iii) Diberikan $G = \{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^n \mid n\in A\}$, dapatkan sifir Cayley untuk $\langle G,\circ\rangle$. Seterusnya, tentukan sama ada $\langle G,\circ\rangle$ subkumpulan normal bagi $\langle S_5,\circ\rangle$.

[18 markah]

5. Diberikan e dan f masing-masing merupakan unsur identiti bagi kumpulan-kumpulan $\langle G,\circ\rangle$ dan $\langle H,*\rangle$. Jika $\phi: G\rightarrow H$ merupakan suatu homomorfisma, nyatakan kaitan di antara ϕ, $\circ$, $*$ dan sebarang $x, y\in G$.

   Seterusnya buktikan yang berikut:

   (i) $e\phi = f$, dan

   (ii) $(x^{-1})\phi = (x\phi)^{-1}$ $\forall x\in G$.

[12 markah]

6. Diberikan $G=\{1,-1,\ i,-i\}$ di mana $i=\sqrt{-1}$,

   $H=\{e,\ (1\,2)(3\,4),\ (1\,3)(2\,4),\ (1\,4)(2\,3)\}$, dan

   $K=\{e,\ (1\,2)(3\,4),\ (1\,3\,2\,4),\ (1\,4\,2\,3)\}$.

   Tentukan yang mana di antara $\langle G,\times\rangle$, $\langle H,\circ\rangle$ dan $\langle K,\circ\rangle$ yang saling berisomorfisma. Seterusnya nyatakan satu homorfisma masing-masing dari setiap kumpulan di atas kepada $\langle Z_2,+\rangle$. Nyatakan Inti bagi setiap homomorfisma tersebut.

[15 markah]

7. Diberikan $Z[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in Z\}$, tunjukkan bahawa $\langle Z[\sqrt{2}],+,\times\rangle$ merupakan suatu gelanggang yang kalis tukar tertib.

[12 markah]

-ooOOOooo-