UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MSG 389 – PENGIRAAN KEJUTERAAN II

Masa : 3 jam

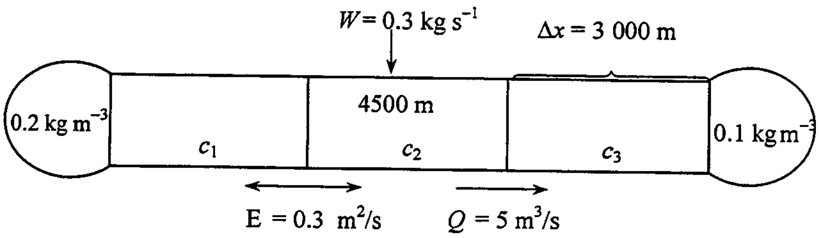
Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua TIGA [3]** soalan.

1. Persamaan parabolik

$$\frac{\partial c}{\partial t} = E\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u\frac{\partial c}{\partial x} - kc + \hat{W} \qquad (1)$$

merupakan satu persamaan aliran-sebaran untuk pencemaran sungai, di mana unit-unit asas ialah meter (m), saat (s) dan kilogram (kg).



Satu bahan kimia yang merosot pada kadar $1.5\times10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$ dilepaskan ke dalam sungai pada kadar $W = 0.3\,\mathrm{kg\,s}^{-1}$ pada lokasi $x = 4500\,\mathrm{m}$ dari hulu. Syarat sempadan ialah $c = 0.2\,\mathrm{kg\,m}^{-3}$ pada hulu dan $0.1\,\mathrm{kg\,m}^{-3}$ pada hilir. Luas keratan rentas sungai ialah $20\,\mathrm{m}^2$ dan panjang sungai ialah $9\,000\,\mathrm{m}$, yang dibahagikan kepada 3 segmen seragam supaya setiap segmen berpanjang $\Delta x = 3\,000\,\mathrm{m}$, seperti tertunjuk di atas.

Anggapkan keadaan mantap tercapai ialah $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$.

(a) Berikan unit-unit untuk setiap sebutan dalam persamaan (1).

(b) Bentukkan sistem (3×3) $A\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{W}$ dengan unit-unit sah, dan selesaikan untuk mendapatkan c_1, c_2, c_3.

(c) Sekarang bahagikan segmen pertama kepada 3 subsegmen seragam, supaya terdapat sekarang 5 segmen. Bentukkan sistem $A_2\,\underset{\sim}{c_2} = \underset{\sim}{W_2}$.

(d) Selesaikan sistem ini untuk $c_1, c_2, \cdots, c_5$.

(e) Lakarkan penyelesaian bagi bahagian (b) dan (d) dalam satu rajah yang sama. Bincangkan bagaimana penyelesaian yang lebih tepat dapat diperoleh. Berikan satu contoh.

(f) Jika $\frac{\partial c}{\partial t} \neq 0$, cadangkan kaedah untuk menyelesaikan persamaan parabolik untuk keadaan tiga segmen seperti di bahagian (a).

[100 markah]

2. (a) Pertimbangkan satu sistem persamaan pembezaan (2×2):

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 4y, \quad x(0) = -4,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 3y, \quad y(0) = 3.$$

(i) Dapatkan penyelesaian analisis, $x = -4e^{-t}$, $y = 3e^{-t}$.

(ii) Bentukkan polinomial Taylor peringkat 2 bagi x dan y. Cari $x(0.5)$, $y(0.5)$ serta berikan dan bincangkan ralat.

(iii) Bentukkan polinomial Taylor peringkat 4 bagi x dan y. Cari $x(0.5)$, $y(0.5)$ serta berikan dan bincangkan ralat.

(iv) Gunakan Kaedah Runge-Kutta peringkat 2 dengan $\Delta t = 0.1$ untuk menilai $x(0.1)$ dan $y(0.1)$ dan berikan ralat.

(v) Gunakan Kaedah Runge-Kutta peringkat 4 dengan $\Delta t = 0.1$ untuk menilai $x(0.1)$ dan $y(0.1)$ dan berikan ralat.

(b) Gunakan Kaedah Kuasa untuk mencari nilai eigen dominan dan vektor eigennya bagi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0.1 & 3 & 1.1 \end{pmatrix}.$$

Mulakan dengan vektor awal $(1, 1, 1)$ dan jalankan 4 lelaran. Cari juga nilai eigen terkecil dengan 3 lelaran.

Buktikan Kaedah Kuasa di atas.

[100 markah]

3. Pertimbangkan persamaan haba berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, a), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, a].$$

$$u(0,t) = g(t), \quad u(a,t) = w(t)$$

Biarkan

$$U_{i,j} = U(x_i, t_j), \quad i = 1,\ldots,m; \quad j = 1,2,3,\ldots$$

$$k = \Delta t, \quad h = \Delta x, \quad r = \frac{ck}{h^2}$$

(a) Terbitan skema kaedah beza ke depan (eksplisit)

$$U_{i,j+1} = r \quad U_{i-1,j} + (1-2r)\,U_{i,j} + r \quad U_{i+1,j}$$

(b) Terbitkan skema kaedah beza ke belakang (implisit)

$$-r \quad U_{i-1,j+1} + (1+2r)U_{i,j+1} - r \; U_{i+1,j+1} = U_{i,j}$$

Pertimbangkan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,2), \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin(\frac{\pi}{2}x), \quad x \in [0,2].$$

Biarkan $h = \Delta x = 0.5, \quad r = 0.4, \Delta t = k = 0.025$.

(c) Terbitkan penyelesaian analisis

$$u = e^{-\left(\pi^2 t\right)} \sin\frac{\pi}{2}x.$$

(d) Gunakan kaedah beza ke depan (eksplisit) untuk mencari u pada $t = 0.025$ dan $t = 0.05$ dengan $\Delta x = 0.5, \Delta t = 0.025$. Adakah kaedah ini stabil?

(e) Gunakan kaedah beza ke belakang (implisit) untuk mencari penyelesaian dengan $\Delta x = 0.5, \Delta t = 0.025$ untuk u pada $t = 0.025$ dan $t = 0.05$. Adakah kaedah ini stabil? Buktikan.

(f) Bincangkan kejituan (d) dan (e).

[100 markah]

-ooo000ooo-