

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2004/2005

Oktober 2004

MSG 327 – PEMODELAN MATEMATIK

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA [5]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua tiga** soalan.

...2/-

1. (a) Andaikan unit asas ialah kg, m dan s. Terbitkan persamaan keabadian

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (1)$$

bagi suatu saluran dengan luas keratan rentas $A \text{ m}^2$, aliran air $Q \text{ m}^3/\text{s}$, $t =$ masa (s), $x =$ jarak (m). Seterusnya terbitkan persamaan gelombang tulen.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

bagi suatu saluran seragam dengan $u =$ halaju air dan $\eta =$ paras air atas paras purata. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang sesuai untuk model di atas serta maksud dan unit g dan h .

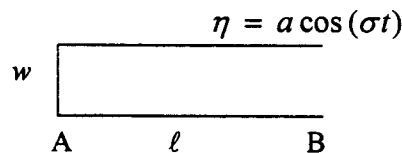
- (b) Sahkan bahawa

$$\eta = a \sin(\sigma t - kx) \quad (4)$$

$$u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(\sigma t - kx) \quad (5)$$

ialah suatu penyelesaian dengan $\sigma^2 = ghk^2$. Apakah maksud dan unit bagi σ dan k ?

- (c) Suatu saluran seragam adalah terbuka kepada pasang surut berkalaan 12.00 jam pada kedua-dua hujung. Biarkan kedalaman purata 9 m, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Dapatkan dan lakarkan η dan u pada rajah yang sama jika amplitud pasang surut ialah 1.2 m. Apakah frekuensi dan panjang gelombang pasang surut ini?
- (d) Misalkan suatu saluran seragam berbentuk segi empat dengan hujung A ditutup dan hujung B terbuka ke pasang-surut $\eta = a \cos(\sigma t) \text{ m}$. Biarkan $\ell \text{ m} =$ panjang saluran, $w \text{ m} =$ lebar, $d \text{ m} =$ kedalaman purata, di mana $a \ll d$.



- (i) Dapatkan aliran $Q(t) \text{ m}^3/\text{s}$ dan halaju $u(t) \text{ m/s}$ pada hujung B.

- (ii) Biarkan $\ell = 25000$ m, $w = 1000$ m, $d = 12$ m, $a = 1.2$ m dan $\sigma = 2\pi/T$ di mana $T = 12$ jam. Cari $Q(t)$ dan $u(t)$ pada B. Lakarkan $Q(t)$ dan $u(t)$ pada rajah yang sama.

[100 markah]

2. (a) Persamaan aliran-sebaran untuk pencemaran sungai adalah diberikan oleh

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc + W. \quad (6)$$

Jika unit asas ialah kg, m, dan s, berikan unit dan maksud bagi setiap sebutan c , u , E , k dan W .

- (b) Apabila keadaan mantap tercapai, persamaan aliran-sebaran bagi pencemaran sungai di atas diringkaskan menjadi

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} - kc = 0. \quad (7)$$

Anggapkan pekali E , u dan k adalah malar.

- (i) Terbitkan penyelesaian analitik

$$c(x) = \begin{cases} c_0 e^{m_1 x}, & x \leq 0 \\ c_0 e^{m_2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

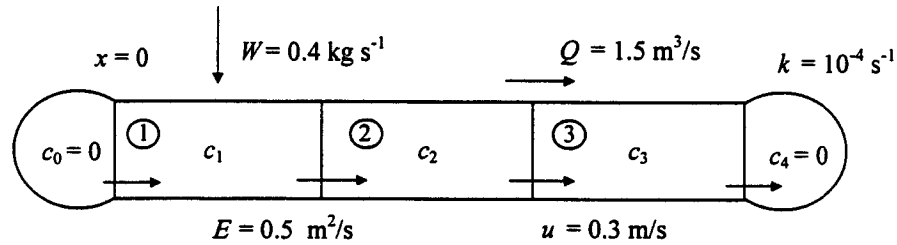
di mana

$$m_1 = \frac{u}{2E}(1 + \alpha), \quad m_2 = \frac{u}{2E}(1 - \alpha), \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{4kE}{u^2}}.$$

Terangkan apakah syarat-syarat sempadan yang sesuai, untuk penyelesaian di atas.

- (ii) Jika aliran ialah Q m³/s dan kadar perlepasan bahan kimia ialah W kg s⁻¹ pada $x = 0$, terbitkan nilai $c_0 = \frac{W}{Q\alpha}$.
- (iii) Andaikan $E = 0.5$ m²/s, $u = 0.3$ m/s, $Q = 1.5$ m³/s, $k = 10^{-4}$ s⁻¹ dan $W = 0.4$ kg s⁻¹. Cari c_0 dan $c(x)$. Lakarkan $c(x)$, untuk $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iv) Dapatkan anggaran nilai untuk setiap sebutan dalam persamaan pembezaan (6) di atas untuk $x \geq 0$ dan $x \leq 0$ masing-masing.

- (c) Berasaskan butir-butir di atas, kita selesaikan (7) bahagian 2(b) melalui kaedah berangka dengan 3 segmen seperti tertunjuk berikut, untuk $x \geq 0$.



Anggapkan panjang setiap segmen ialah $\Delta x = 1000 \text{ m}$, dan $c_0 = 0$, $c_4 = 0$.

Bentukkan sistem (3×3) untuk masalah ini dan selesaikan. Bandingkan dengan jawapan di bahagian (2b) di atas.

Adakah pilihan $\Delta x = 1000 \text{ m}$, dan $c_0 = c_4 = 0$ sesuai? Terangkan.

- (d) Terbitkan persamaan (6). Terangkan dengan jelas anggapan sesuai yang dikenakan.

[100 markah]

3. (a) Misalkan suatu bahan organik terlarut (BOD) di dalam satu kolam kecil dengan kepekatan $l \text{ mg}/\ell$, (O_2) yang merosot nilainya mengikut kadar linear berikut

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\alpha l, \quad l(0) = l_0. \quad (8)$$

Di samping ini oksigen terlarut (DO) dalam kolam itu $c \text{ mg}/\ell O_2$ akan berubah mengikut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \beta(c_s - c) - \alpha l, \quad c(0) = c_0 \quad (9)$$

di mana β ialah kadar pengudaraan semula dan c_s pemalar ketepuan bagi oksigen terlarut c .

Selesaikan (8) untuk l terlebih dahulu dan kemudian selesaikan (9) untuk c .

Jika $l_0 = 15 \text{ mg}/\ell$, $c_0 = 5 \text{ mg}/\ell$, $c_s = 8.8 \text{ mg}/\ell$, $\alpha = 0.6$ sehari dan $\beta = 0.9$ sehari, dapatkan l dan c . Lakarkan l dan c di rajah yang sama, untuk $x \in [0, \infty)$.

- (b) Sekarang persamaan (8) di atas diubahsuai kepada

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\alpha l + \gamma, \quad l(0) = l_0 \quad (10)$$

...5/-

di mana γ adalah pemalar. Persamaan (9) dikekalkan. Apakah maksud dan dimensi bagi γ ?

Selesaikan (10) untuk mendapatkan ℓ . Masukkan ℓ ini ke dalam (9) dan selesaikan (9) untuk c .

Jika $\gamma = 0.5 \text{ mg} / \ell / \text{hari}$, dan parameter-parameter lain di dalam (9) dan (10) dikekalkan seperti di bahagian (3a) atas, selesaikan dan lakarkan ℓ dan c pada rajah yang sama, dengan menunjukkan kelakuan penyelesaian apabila $t \rightarrow \infty$.

[100 markah]

- 000 O 000 -