UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MSG 284 – GEOMETRI BERKOMPUTER

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua TIGA** soalan.

1. (a) Andaikan **P**(u,v) sebagai suatu permukaan berparameter dengan $\mathbf{a} = \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}$, $\mathbf{b} = \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}$, $E = \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}$, $F = \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}$ dan $G = \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}$.

Jika θ sudut di antara **a** dan **b**, tunjukkan bahawa

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}}.$$

(b) Kira kelengkungan dan kilasan heliks $\mathbf{r} = (a \text{ kos } \theta)\mathbf{i} + (a \sin \theta)\mathbf{j} + (b\,\theta)\mathbf{k}$, a dan b nombor nyata dan tidak sifar secara serentak.

(c) Bentuk algebra **p**, suatu lengkung kubik berparameter yang ditakrif pada selang [0,1] boleh ditulis sebagai $\mathbf{p}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \mathbf{A}_3 t^3$ dengan **p** sebagai vektor kedudukan sebarang titik pada lengkung dan $\mathbf{A}_i$, i = 0, .. , 3 sebagai vektor yang setara dengan pekali algebra skalar. Komponen **p**(t) adalah sepadan dengan koordinat Cartesan titik berkenaan dan ditentukan berdasarkan kekangan yang ditetapkan ke atas **p**.

(i) Tulis vektor $\mathbf{A}_i$, i = 0, 1, 2, 3 dalam sebutan titik hujung, **p**(0) dan **p**(1) dan vektor tangen sepadan **p**'(0) dan **p**'(1).

(ii) **p**(0), **p**(1), **p**'(0) dan **p**'(1) dipanggil pekali geometri. Ungkapkan **p** dalam bentuk Hermite dengan menggunakan pekali geometri. Dengan demikian, nyatakan set fungsi asas Hermite.

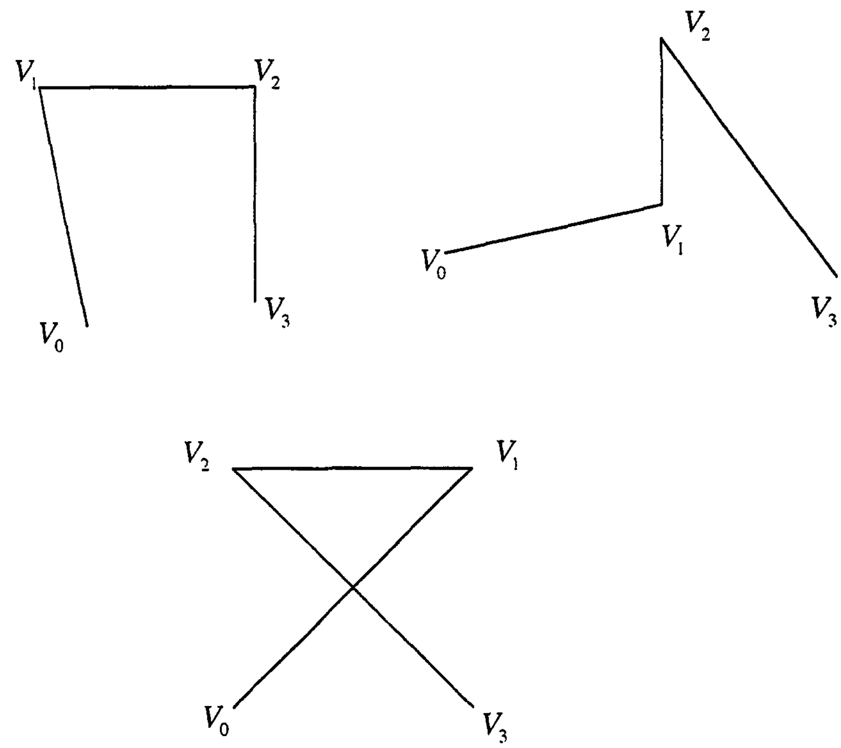
[100 markah]

2. (a) Andaikan lengkung Bezier berdarjah n ditakrifkan sebagai P(t) = $\sum_{i=0}^{n} V_i B_i^n(t), 0 \le t \le 1$ dengan $B_i^n(t) = \dfrac{n! t^i (1-t)^{n-i}}{(n-i)!i!}$ dan V_i sebagai titik kawalan Bezier.

(i) Sekiranya lengkung Bezier berdarjah n ditingkatkan darjahnya kepada (n + 1) dengan titik kawalan yang baru $\hat{V}_i$, tunjukkan bahawa $\hat{V}_i = \dfrac{i}{n+1} V_{i-1} + \dfrac{n+1-i}{n+1} V_i,\ i = 0, \ldots, n+1$.

(ii) Lakarkan serta labelkan fungsi asas Bezier kubik, $B_i^3(t), i = 0, \ldots, 3$ pada rajah yang sama.

(iii) Lakarkan lengkung Bezier kubik yang sepadan dengan poligon kawalan berikut:



(iv) Tunjukkan bahawa lengkung Bezier kubik dengan titik kawalan W_0, W_1, W_2 dan W_3 akan menghasilkan lengkung Bezier kuadratik dengan titik kawalan V_0, V_1 dan V_2 jika $W_0 = V_0$, $W_1 = (V_0 + 2V_1)/3$, $W_2 = (V_2 + 2V_1)/3$ dan $W_3 = V_2$.

(b) Cebis yang ke-i lengkung splin-B seragam kuadratik dengan titik kawalan V_{i-1}, V_i dan V_{i+1} ditakrifkan sebagai

$$P_i(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1.$$

(i) Kira titik mula dan titik akhir cebis i.

(ii) Tulis vektor tangen pada titik mula dan titik akhir cebis ke-i .

(iii) Andaikan V_0, V_1 dan V_2 sebagai titik kawalan lengkung splin-B seragam kuadratik sementara W_0, W_1 dan W_2 adalah titik kawalan lengkung Bezier kuadratik. Tulis hubungan di antara V_i dan W_i, i = 0, 1, 2 jika kedua-dua lengkung adalah lengkung yang sama.

[100 markah]

3. (a) Tampalan permukaan splin-B bikuadratik seragam P(u,v), ditakrifkan sepenuhnya oleh 9 titik kawalan dan boleh ditulis dalam bentuk hasil darab matriks $\mathbf{UMBM}^T\mathbf{V}^T$, dengan

$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v^2 & v & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks titik kawalan splin-B,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} V_{00} & V_{01} & V_{02} \\ V_{10} & V_{11} & V_{12} \\ V_{20} & V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}.$$ Tentukan pemasukan matriks **M**.

Seterusnya, tulis keempat-empat titik penjuru P(0, 0), P(0, 1), P(1, 0) dan P(1, 1) sebagai gabungan linear titik-titik kawalan V_{ij}. Lakarkan hubungan di antara permukaan dan titik-titik kawalannya.

(b) Andaikan $V_{00} = (0,0,0)$, $V_{01} = (0,1,0)$, $V_{02} = (0,2,0)$, $V_{10} = (1,0,0)$, $V_{11} = (1,1,1)$, $V_{12} = (1,2,0)$, $V_{20} = (2,0,0)$, $V_{21} = (2,1,0)$, $V_{22} = (2,2,0)$. Tunjukkan bahawa tampalan permukaan splin-B bikuadratik seragam yang ditakrifkan oleh titik-titik kawalan ini ialah

$P(u,v) = (u+\frac{1}{2},\ v+\frac{1}{2}, (-1-2u+2u^2)(-1-2v+2v^2)/4)$ dan empat titik penjurunya ialah $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4})$, $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ dan $(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4})$.

(c) Jika permukaan Coons linear, P(u,v) = $\begin{pmatrix} 1-u & u & 1 \end{pmatrix} \mathrm{M} \begin{pmatrix} 1-v & v & 1 \end{pmatrix}^T$ menginterpolasi empat lengkung sempadan, F(u,0), F(u,1), F(0,v) dan F(1,v), tulis pemasukan matriks M.

[100 markah]

-oooOOOooo-