UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

MSG 284 – Geometri Berkomputer

Masa : 3 jam

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA [3]** soalan di dalam **EMPAT [4]** halaman muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan **P**(u,v) sebagai suatu permukaan berparameter. Jika ditakrifkan

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}, \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}, \ E = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}, F = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \text{ dan } G = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v},$$

(i) buktikan bahawa $EG - F^2 > 0$.

(ii) Jika θ sudut di antara **a** dan **b**, tunjukkan bahawa

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}}.$$

(b) Tunjukkan bahawa kelengkungan dan kilasan heliks **r** = akos θ **i** + asin θ **j** + bθ **k** masing-masingnya ialah $\frac{a}{a^2+b^2}$ dan $\frac{b}{a^2+b^2}$.

(c) Bentuk algebra **p**, suatu lengkung kubik berparameter yang ditakrif pada selang [0,1] boleh ditulis sebagai $\mathbf{p}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \mathbf{A}_3 t^3$ dengan **p** sebagai vektor kedudukan pada sebarang titik pada lengkung dan $\mathbf{A}_i$, i = 0, .., 3 sebagai vektor yang setara dengan pekali algebra skalar.

(i) Tulis vektor $\mathbf{A}_i$, i = 0, 1, 2, 3 dalam sebutan syarat sempadan, **p**(0), **p**(1) dan vektor tangen sepadan **p**′(0), **p**′(1).

(ii) Seterusnya, ungkapkan **p** dalam bentuk Hermite dengan menggunakan pekali geometri **p**(0), **p**(1), **p**′(0) dan **p**′(1). Nyatakan set fungsi asas Hermite.

[100 markah]

2. (a) Andaikan lengkung Bezier berdarjah n ditakrifkan sebagai P(t) =

$$\sum_{i=0}^{n} V_i B_i^n(t), 0 \le t \le 1 \quad \text{dengan } B_i^n(t) = \frac{n!t^i(1-t)^{n-i}}{(n-i)!i!}$$

dan V_i sebagai titik kawalan Bezier.

(i) Tunjukkan bahawa $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$. Seterusnya, tunjukkan bahawa $\sum_{i=0}^{n} V_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} V_{n-i} B_i^n(1-t)$.

(ii) Andaikan P(t) = $\sum_{i=0}^{3} V_i B_i^3(t)$ dan Q(t) = $\sum_{i=3}^{6} V_i B_i^3(t)$, nyatakan syarat-syarat terhadap V_i, i = 0, .. , 6 yang berkenaan supaya P dan Q berkeselanjaran C^2 pada V_3.

(iii) Lakarkan contoh suatu rajah kedudukan titik-titik kawalan Bezier dengan menyatakan nisbah jarak yang perlu dipenuhi seandainya keselanjaran G^2 pada V_3 ingin dicapai di bahagian (ii).

(iv) Tunjukkan bahawa lengkung kubik Bezier akan menghasilkan lengkung kuadratik Bezier jika tangen pada titik hujung bersilang pada $V_1 = (V_0 + 2V_1)/3$ dan $V_2 = (V_3 + 2V_1)/3$.

(b) Fungsi splin-B seragam berdarjah (n-1) ditakrifkan sebagai

$$M_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(i-x)_+^{n-1} \text{ dengan}$$

$$(i-x)_+^{n-1} = \begin{cases} (i-x)^{n-1}, \forall x < i \\ 0, \forall x \geq i \end{cases}.$$

(i) Tulis $M_3(x)$ dalam bentuk polinomial cebis demi cebis pada selang $(-\infty, \infty)$. Lakarkan graf M_3.

(ii) Transformasikan setiap cebis pada selang [0, 3] yang telah diperoleh di bahagian (i) kepada bentuk $N_i(t)$, i = 0, .. , 2 dengan $0 \leq t \leq 1$. Seterusnya, nyatakan nilai $\sum_{i=0}^{2} N_i(t)$.

(iii) Dapatkan hubungan di antara W_i, titik-titik kawalan lengkung splin-B kuadratik seragam $\sum_{i=0}^{2} W_i N_i(t)$ dengan V_i, titik-titik kawalan lengkung Bezier kuadratik $\sum_{i=0}^{2} V_i B_i^2(t)$ yang sama.

[100 markah]

3. (a) (i) Andaikan tampalan Bezier darjah (m x n) ditakrifkan sebagai

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} V_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

dengan $0 \leq u, v \leq 1$ dan V_{ij} sebagai titik kawalan Bezier.

Tunjukkan bahawa permukaan ini memenuhi syarat hul cembung.

(ii) Jika tampalan Bezier bikubik (m = n = 3 di bahagian (i)) ditulis dalam bentuk hasil darab matriks $UMWM^TV^T$, dengan $U = (1\ u\ u^2\ u^3)$, $V = (1\ v\ v^2\ v^3)$, tentukan pemasukan matriks M dan W.

(iii) Jika darjah tampalan Bezier ditingkatkan kepada (m + 1) dalam arah u, yakni

$$\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{n}\hat{V}_{ij}\,B_i^{m+1}(u)B_j^n(v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}V_{ij}B_i^m(u)B_j^n(v),$$

tunjukkan bahawa

$$\hat{V}_{ij}=\frac{i}{m+1}V_{(i-1)j}+(1-\frac{i}{m+1})V_{ij},i=0,..,m+1;j=0,..,n.$$

Seterusnya, nyatakan hubungan di antara titik kawalan $\hat{V}_{ij}$ dan V_{ij} sekiranya darjah ditingkatkan kepada (n + 1) dalam arah v. Dengan demikian, tulis dalam bentuk matriks hubungan di antara titik kawalan yang diperoleh apabila tampalan darjah (m + 1) x (n + 1) diperoleh daripada tampalan darjah (m x n).

(b) Bincang tentang pelaksanaan kaedah interpolasi Coons untuk menjana permukaan bikubik dengan menggunakan empat lengkung sempadan.

[100 markah]

-ooo000ooo-