UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MSG 253 – SISTEM GILIRAN DAN SIMULASI

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **SEPULUH [10]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua tiga** soalan.

1. (a) Pertimbangkan sistem giliran M/M/1 dengan kadar ketibaan λ dan kadar layanan μ.

   (i) Lukiskan gambarajah kadar bagi sistem giliran itu.

   (ii) Dengan menggunakan proses lahir-mati dan di bawah andaian bahawa sistem berkeadaan mantap, tunjukkan bahawa kebarangkalian sistem berkeadaan n dapat ditentukan secara berikut:

$$P_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \text{ untuk } n = 0,1,2...$$

   (iii) Seterusnya, tunjukkan bahawa keadaan purata sistem dapat ditentukan secara berikut:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

[50 markah]

(b) Wani, Siti dan Lina adalah tiga orang kerani yang sama cekap yang telah ditugaskan untuk mengendalikan sebuah pejabat agensi pelancongan. Setiap kerani berupaya melayan 3 pelanggan sejam dan masa layanan sebenar adalah mengikut agihan eksponen. Daripada data yang ada yang ada, didapati bahawa pelanggan tiba mengikut proses Poisson.

Jika tidak ada pelanggan yang sedang menunggu, kadar ketibaan ialah 15 seorang sejam. Jika terdapat seorang ataupun dua orang pelanggan sedang menunggu, kadar ketibaan menjadi 10 orang sejam. Jika terdapat lebih daripada 2 orang sedang menunggu, kadar ketibaan menjadi 5 sejam dan seterusnya sekiranya terdapat 5 orang menunggu, pelanggan yang tiba ketika itu tidak akan memasuki pejabat.

   (i) Tentukan kebarangkalian bahawa Wani akan bersenang.

   (ii) Tentukan jangkaan bilangan pelanggan yang berada di dalam pejabat itu.

   (iii) Pada puratanya berapa lamakah seorang pelanggan akan berada di dalam pejabat itu?

[50 markah]

2. (a) Pengurus sebuah bank harus menentukan bilangan juruwang yang patut tugaskan bekerja pada hari Jumaat. Bagi setiap minit seseorang pelanggan berdiri dalam baris menunggu, dipercayai bahawa pihak bank akan menanggung kos kelewatan sebanyak 5 sen. Ketibaan pelanggan adalah pada puratanya 2 orang seminit. Pada puratanya, seseorang pelanggan memerlukan masa selama 2 minit untuk berurusan dengan juruwang. Gaji yang dibayar kepada seorang juruwang ialah RM9 sejam. Masa antara ketibaan dan masa layan adalah mengikut agihan eksponen. Bagi meminimumkan jumlah kos perkhidmatan dan juga kos kelewatan, berapa orang juruwangkah yang patut ditugaskan pada hari Jumaat?

[25 markah]

...3-

(b) Terdapat 2 buah kedai gunting rambut di Pekaka Square dengan setiap satunya berupaya memuatkan 4 orang pelanggan sahaja. Pelanggan yang tiba ke sebuah kedai gunting yang penuh akan membatalkan hasrat mereka untuk menggunting rambut. Setiap kedai gunting itu dikendalikan oleh seorang tukang gunting sahaja. Kedai gunting A mengenakan bayaran RM11 seorang dan mengambil masa purata 12 minit seorang untuk menggunting. Kedai gunting B pula mengenakan bayaran RM5 seorang dan mengambil masa purata 6 minit. Pada puratanya 10 pelanggan sejam tiba disetiap kedai. Dengan mengandaikan bahawa masa antara ketibaan dan masa menggunting adalah eksponen, tukang gunting manakah yang akan mendapat pendapatan yang lebih.

[25 markah]

(c) Sebuah bilik diterangi oleh 2 biji lampu mentol. Pada puratanya, sebiji lampu mentol boleh bertahan selama 22 hari (dengan agihan eksponen). Apabila sesebiji lampu mentol itu terbakar, masa purata yang diambil untuk menggantinya adalah 2 hari (dengan agihan eksponen).

(i) Tentukan peratusan masa kedua-dua mentol menyala.

(ii) Tentukan peratusan masa kedua-dua mentol terbakar.

[25 markah]

(d) Terdapat 3 ekor anak kucing yang sedang bermain-main dengan melompat masuk dan keluar daripada sebuah kotak kosong. Pada puratanya seseekor anak kucing akan berada di dalam kotak selama 10 minit (dengan agihan eksponen) sebelum ia melompat keluar. Apabila ia berada di luar kotak, anak kucing itu akan bermain di luar untuk selama 15 minit (dengan agihan eksponen) pada pratanya sebelum ia melompat semula ke dalam kotak.

(i) Apakah kebarangkalian bahawa lebih banyak anak kucing berada di luar kotak berbanding dengan yang berada di dalamnya?

(ii) Pada puratanya, berapa ekor anak kucingkah yang akan berada di dalam kotak

[25 markah]

3. (a) Ketibaan kapal-kapal tangki ke sebuah pelabuhan adalah mengikut agihan berikut:

Masa antara ketibaan (hari)	Kebarangkalian
1	.20
2	.25
3	.35
4	.15
5	.05

Pelabuhan itu mempunyai dua terminal, A dan B. Terminal B baru sahaja dibina, dengan itu perkhidmatan yang diberikan di situ adalah lebih cekap daripada di terminal A. Masa yang diperlukan untuk memungah muatan sesebuah kapal tangki adalah bergantung kepada saiz kapal tangki berkenaan. Sebuah kapal tangki besar, megambil masa 4 hari untuk dipunggah di terminal A dan 3 hari di terminal B. Sebuah kapal tangki sederhana mengambil masa 3 hari untuk dipunggah di terminal A dan 2 hari di terminal B. Sebuah kapal tangki kecil pula mengambil masa 2 hari di terminal A dan 1 hari di terminal B. Kapal-kapal tangki yang tiba di pelabuhan itu akan membentuk satu barisan menunggu dan akan menunggu sehinggalah ada terminal yang bersedia untuk memberi perkhidmatan. Perkhidmatan diberikan secara yang dahulu didahulukan. Kekerapan ketibaan kapal-kapal tangki yang berbagai jenis itu adalah seperti berikut:

Jenis kapal tangki	Kebarangkalian
Besar	.40
Sederhana	.35
Kecil	.25

Lakukan simulasi dengan tangan untuk ketibaan dan penmunggahan 10 buah kapal tangki dan tentukan bilanggan purata kapal tangki di pelabuhan, masa purata sesebuah kapal tangki berada di pelabuhan dan juga peratusan masa bersenang di setiap terminal.
[Gunakan jadual nombor rawak yang dilampirkan dengan lajur pertama untuk lat ketibaan dan lajur kedua untuk menentukan jenis kapal tangki].

[50 markah]

(b) Untuk soalan 3(a), bentukkan satu model GPSS untuk larian selama setahun.

[50 markah]

Lampiran 1

Rumus-rumus bagi Teorem Giliran:

1. M/M/1 :

$$\rho = \lambda/\mu$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \qquad \text{untuk } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad , \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$P[W > t] = e^{-t/W}$$

$$P[W_q > t] = \rho e^{-t/W}$$

2. M/M/s:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$P_0 = \left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & , \quad \text{jika } 0 \le n \le s \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}} P_0 & , \quad \text{jika } n \ge s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} P_0$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad W = W_q + 1/\mu$$

$$L = L_q + \lambda/\mu$$

...6/-

$$P\left[W_q > t\right] = \frac{P_0 s\mu(\lambda/\mu)^s}{s!(s\mu-\lambda)} e^{-(s\mu-\lambda)t}$$

Lampiran 2

3. M/M/s dengan saiz sumber input terhad sebanyak M:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{M} \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s}\, s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \text{ jika } 0 \le n \le s \\ P_0 \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s}\, s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \text{ jika } s \le n \le M \\ 0 & , \text{ jika } n > M \end{cases}$$

$$L = P_0\left[\sum_{n=0}^{s-1} n\binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{m} n\binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s}\, s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

$$L_q = L - s + P_0 \sum_{n=0}^{s-1}(s-n)\binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$W = \frac{L}{\lambda(M-L)} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda(M-L)}$$

4. M/G/1:

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$L = \rho + L_q$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

5. $M/E_k/1$:

$$L_q = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = W_q + 1/\mu$$

$$L = \lambda W$$

Lampiran 3

6. Model M/M/1/k

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & (\rho \neq 1) \\ \dfrac{1}{k+1} & (\rho = 1) \end{cases}$$

Untuk $\rho \neq 1$

$$L = \frac{\rho\left[1-(k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}\right]}{\left(1-\rho^{k+1}\right)(1-\rho)}$$

$$L_q = L - (1-P_0) = L - \frac{\rho\left(1-\rho^k\right)}{1-\rho^{k+1}}$$

$$W = L/\lambda' \quad , \quad \lambda' = \mu(L - L_q)$$

$$W_q = W - 1/\mu = L_q / \lambda'$$

Untuk $\rho = 1$

$$L = \frac{k}{2}$$

7. Model M/M/s/k :

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (0 \leq n < s) \\ \dfrac{1}{s^{n-2}\, s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (s \leq n \leq k) \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \; \frac{1-\left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s+1}}{1-\dfrac{\lambda}{s\mu}}\right]^{-1} & \left(\dfrac{\lambda}{s\mu} \neq 1\right) \\ \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \; (k - s + 1)\right]^{-1} & \left(\dfrac{\lambda}{s\mu} = 1\right) \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 (s\rho)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}\left[1 - \rho^{k-s+1} - (1-\rho)(k-s+1)\rho^{k-s}\right]$$

Lampiran 4

$$L = L_q + s - P_0 \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s-n)(\rho s)^n}{n!}$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \quad , \quad \lambda' = \lambda(1 - P_k)$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

8. Model M/M/s/s :

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n / n!}{\sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i / i!} \qquad (0 \le n \le s)$$

$$P_s = \frac{(s\rho)^s / s!}{\sum_{i=0}^{s} (s\rho)^i / i!} \qquad \left(\rho = \frac{\lambda}{s\mu}\right).$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_s) \quad , \quad W = \frac{L}{\lambda'} \text{ dengan } \lambda' = \lambda(1 - P_s)$$

9. Model M/M/∞ :

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n \, e^{-\lambda/\mu}}{n!} \qquad (n \ge 0)$$

$$L = \lambda/\mu \quad W = \frac{1}{\mu}$$

Lampiran 5

10. **Layanan Berkeadaan**

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & (1 \le n \le k) \\ \mu & (n \ge k) \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\frac{1-\rho_1^{\,k}}{1-\rho_1} + \frac{\rho\rho_1^{\,k-1}}{1-\rho} \right]^{-1} \qquad (\rho_1 = \lambda/\mu_1,\ \rho = \lambda/\mu < 1)$$

$$L = P_0 \left[\frac{\rho_1\left[1+(k-1)\rho_1^{\,k} - k\rho_1^{\,k-1}\right]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho\rho_1^{\,k-1}[k-(k-1)\rho]}{(1-\rho)^2} \right]$$

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \qquad\qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1-P_0}{\lambda}$$

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu_1}\right)^n P_0 & (0 \le n < k) \\ \dfrac{\lambda^n}{\mu_1^{\,k-1}\,\mu^{n-k+1}} P_0 & (n \ge k) \end{cases}$$

11. M/M/1 dengan saiz sumber input terhad sebanyak M.

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

$$P_n = \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \text{bagi } n = 1, 2, \ldots, M$$

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda}\,[1-P_0]$$

$$L_q = M - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\,(1 - P_0)$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \ , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda'} \quad \text{dengan } \lambda' = \lambda(M-L)$$

Lampiran 6

TABLE 1.8 TWO-DIGIT RANDOM-NUMBER TABLE

03	26	48	92	38	96	41	04	35	84
71	44	81	46	44	47	07	20	58	04
33	75	00	41	87	72	63	88	59	54
53	71	27	13	37	45	89	61	30	26
41	15	43	91	46	81	57	39	34	86
16	18	75	11	26	80	93	97	29	33
88	50	00	56	70	19	90	00	93	95
13	10	08	15	29	33	75	70	43	05
15	72	73	69	27	75	72	95	99	56
64	10	99	02	18	26	78	69	19	12
98	66	53	86	34	71	09	88	56	08
43	05	06	19	91	78	03	65	08	16
69	82	02	61	98	50	74	84	60	41
06	40	10	24	68	42	39	97	25	55
34	86	83	41	33	83	85	92	32	29
46	05	92	36	82	04	67	05	18	69
28	73	59	56	43	88	61	17	07	48
35	53	49	39	98	14	16	76	69	10
90	90	18	27	75	08	75	17	55	68
62	32	97	16	33	66	02	34	62	26

- 000 O 000 -