

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2004/2005

October 2004

MGM 562 – PROBABILITY THEORY
[TEORI KEBARANGKALIAN]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **SEVEN [7]** pages of printed material before you begin the examination.

Answer **all FOUR** questions.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH [7]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Jawab **semua empat** soalan.

...2/-

1. (a) A Statistics Professor who teaches three sections of the same course every semester decides to make several tests and use them for the next 10 years (20 semesters) as final exams. The professor has two policies: (1) not to give the same test to more than one class in a semester, and (2) not to repeat the same combination of three tests for any two semesters. Determine the minimum number of different tests that the professor should prepare.

Seorang Profesor statistik yang mengajar 3 bab bagi kursus yang sama bagi setiap semester bercadang untuk memberikan beberapa ujian dan menggunakannya untuk 10 tahun yang akan datang (20 semester) sebagai peperiksaan akhir. Profesor tersebut mempunyai 2 polisi: (1) tidak memberikan ujian yang sama kepada lebih daripada satu kelas dalam 1 semester, dan (2) tidak mengulangi kombinasi 3 ujian yang sama bagi sebarang 2 semester. Cari bilangan ujian berlainan minimum yang perlu diberikan oleh profesor itu.

- (b) In a technical college, all students are required to take calculus and physics. Statistics show that 32 % of the students of this college get A's in calculus, and 20 % of them get A's in both calculus and physics. One student, randomly selected from this college, has passed calculus with an A. What is the probability that he/she got an A in physics?

Dalam kolej teknikal semua pelajar diwajibkan mengambil kursus kalkulus dan fizik. Statistik menunjukkan bahawa 32 % daripada pelajar-pelajar kolej ini mendapat gred A dalam kalkulus, dan 20% daripada mereka mendapat gred A dalam kedua-dua kalkulus dan fizik. Seorang pelajar yang dipilih secara rawak daripada kolej ini lulus kalkulus dengan gred A. Apakah kebarangkalian pelajar ini mendapat gred A dalam fizik?

- (c) On a multiple-choice exam with four choices for each question, a student either knows the answer to a question or marks it at random. If the probability that he or she knows the answer is $\frac{2}{3}$, what is the probability that an answer that was marked correctly was not marked randomly?

Dalam suatu peperiksaan pelbagai pilihan dengan 4 jawapan berlainan bagi setiap soalan, seorang pelajar hanya tahu menjawab suatu soalan dengan betul atau menerka jawapan secara rawak. Jika kebarangkalian pelajar itu tahu jawapan yang betul ialah $\frac{2}{3}$, apakah kebarangkalian jawapan yang dijawab dengan betul tidak ditanda secara rawak?

- (d) A professor has made 30 exams of which eight are difficult, 12 are reasonable, and 10 are easy. The exams are mixed up, and the professor selects four of them at random to give to four sections of the course he is teaching. How many sections would be expected to get a difficult test?

Seorang profesor menyediakan 30 soalan ujian yang mana 8 daripadanya adalah sukar, 12 adalah sederhana sukar, dan 10 yang senang. Ujian-ujian ini dicampurkan, dan profesor tersebut memilih 4 daripadanya secara rawak untuk diberikan selepas beliau habis mengajar 4 bab yang berlainan. Berapa bab yang dijangkakan akan mendapat ujian yang sukar?

[25 markah/marks]

2. (a) The grades for a certain exam are normally distributed with mean 67 and variance 64. What are the percentages of students who obtained A (≥ 90), B ($80 - 90$), C ($70 - 80$), D ($60 - 70$), and F (< 60)?

Gred bagi suatu ujian tertentu tertabur secara normal dengan min 67 dan varians 64. Apakah peratus pelajar yang mendapat gred A (≥ 90), B ($80 - 90$), C ($70 - 80$), D ($60 - 70$), dan F (< 60)?

- (b) The time it takes for a student to finish an aptitude test (in hours) has a density function of the form:

$$f(x) = \begin{cases} c(x-1)(2-x), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (i) Determine the constant c
- (ii) Calculate the distribution function of the time it takes for a randomly selected student to finish the aptitude test.
- (iii) What is the probability that a student will finish the aptitude test in less than 75 minutes? Between 1.5 and 2 hours?

Masa yang diambil bagi seorang pelajar menjawab suatu ujian bakat (dalam jam) mempunyai fungsi ketumpatan,

$$f(x) = \begin{cases} c(x-1)(2-x), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

- (i) Cari nilai pemalar c .
- (ii) Cari fungsi taburan bagi masa yang diambil untuk seorang pelajar yang dipilih secara rawak untuk menjawab ujian bakat.
- (iii) Apakah kebarangkalian seorang pelajar boleh menjawab ujian bakat dalam masa kurang daripada 75 minit?. Antara 1.5 dan 2 jam?

- (c) The time it takes for a student to finish an aptitude test (in hours) has the density function,

$$f(x) = \begin{cases} 6(x-1)(2-x), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Determine the mean and standard deviation of the time it takes for a randomly selected student to finish the aptitude test.

...4/-

Masa yang diambil oleh seorang pelajar untuk menjawab ujian bakat (dalam jam) mempunyai fungsi ketumpatan,

$$f(x) = \begin{cases} 6(x-1)(2-x), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Cari min dan sisihan piawai bagi masa yang diambil oleh seorang pelajar yang dipilih secara rawak menjawab ujian itu.

- (d) Let X , be a normal random variable with represents the grade of a randomly selected student in a test in a probability course. A professor grades such a test by first its find the average μ and the standard deviation σ of the grades and then assigns letter grades according to the following table:

Range of the grade	$x \geq \mu + \sigma$	$\mu \leq x \leq \mu + \sigma$	$\mu - \sigma \leq x < \mu$	$\mu - 2\sigma \leq x < \mu - \sigma$	$x < \mu - 2\sigma$
Letter grade	A	B	C	D	F

Determine the percentage of the students who will get A, B, C, D and F, respectively.

Biarkan X sebagai pembolehubah rawak bertaburan normal yang mewakili gred seorang pelajar yang dipilih secara rawak. Seorang profesor memberi gred ujian ini dengan memperoleh min μ dan sisihan piawainya, σ , terlebih dahulu, dan kemudian memberi gred berdasarkan jadual berikut:

Julat gred	$x \geq \mu + \sigma$	$\mu \leq x \leq \mu + \sigma$	$\mu - \sigma \leq x < \mu$	$\mu - 2\sigma \leq x < \mu - \sigma$	$x < \mu - 2\sigma$
Huruf gred	A	B	C	D	F

Cari peratus pelajar yang akan mendapat gred A, B, C, D, dan F.

[25 markah/marks]

3. (a) The scores on achievement test given to 100,000 students are normally distributed with mean 500 and standard deviation 100. What should the score of a student be to place him among the top 10% of all students?

Skor pada suatu ujian pencapaian yang diberikan kepada 100,000 pelajar adalah bertaburan normal dengan min 500 dan sisihan piawai 100. Apakah skor seorang pelajar untuk membolehkannya dikategorikan dalam 10 % skor tertinggi dari semua pelajar?

- (b) At a certain university, the fraction of students who get a C in any section of a certain course is uniform over $(0,1)$. Find the probability that the median of these fractions for the 13 sections of the course that are offered next semester is at least 0.40.

Dalam suatu universiti tertentu, pecahan pelajar yang mendapat gred C dalam sebarang bab bagi suatu kursus bertaburan seragam pada selang $(0,1)$. Cari kebarangkalian bahawa median pecahan-pecahan bagi 13 bab dalam kursus tersebut yang ditawarkan pada semester yang akan datang adalah sekurang-kurangnya 0.40.

- (c) The time that it takes for a calculus student to answer all the questions on a certain exam is an exponential random variable with mean 1 hour and 15 minutes. If all 10 students of a calculus class are taking the exam, what is the probability that at least one of them completes it in less than one hour?

Masa yang diambil oleh seorang pelajar kalkulus untuk menjawab semua soalan dalam suatu ujian tertabur secara rawak adalah bertaburan eksponen secara rawak dengan min 1 jam 15 minit. Jika kesemua 10 pelajar daripada suatu kelas kalkulus mengambil ujian itu, apakah kebarangkalian sekurang-kurangnya seorang pelajar menghabiskan ujian dalam masa kurang daripada 1 jam.

- (d) At a certain university, the joint probability density function of X and Y , the grade averages of a student in his or her freshman and senior years, respectively, is bivariate normal. From the grades of past years it is known that $\mu_x = 3$, $\mu_y = 2.5$, $\sigma_x = 0.5$, $\sigma_y = 0.4$, and $\rho = 0.4$. Find the probability that a student with grade average 3.5 in his or her freshman year will earn a grade average of at least 3.2 in his or her senior year.

Dalam suatu universiti tertentu, fungsi ketumpatan tercantum X dan Y , yang mewakili min gred seorang pelajar dalam tahun pertama dan tahun berikutnya mempunyai taburan normal bivariat. Daripada gred tahun-tahun yang lepas diketahui bahawa $\mu_x = 3$, $\mu_y = 2.5$, $\sigma_x = 0.5$, $\sigma_y = 0.4$, dan $\rho = 0.4$. Cari kebarangkalian seorang pelajar dengan min gred 3.5 dalam tahun pertamanya akan mendapat min gred sekurang-kurangnya 3.2 dalam tahun berikutnya.

[25 markah/marks]

4. (a) The grades of students in probability course are normal with mean 72 and standard deviation 7. If 90, 80, 70, and 60 are the respective lowest marks for, A, B, C, and D, respectively. What percent of students in this course obtained A's, B's, C's, D's, and F's?

Gred pelajar-pelajar dalam kursus kebarangkalian mempunyai taburan normal dengan min 72 dan sisihan piawai 7. Jika 90, 80, 70, dan 60 adalah markah terendah untuk gred A, B, C, dan D masing-masing. Apakah peratus pelajar dalam kursus ini yang mendapat gred A, B, C, D, dan F?

...6/-

- (b) A small college has 90 male and 30 female professors. An ad hoc committee of 5 is selected at random to write the vision and mission of the college. Let X and Y be the number of men and women on this committee, respectively.

- (i) Find the joint probability function of X and Y .
- (ii) Find p_x and p_y , the marginal probability functions of X and Y .

Suatu kolej kecil mempunyai 90 profesor lelaki dan 30 wanita. Suatu jawatan kuasa sementara yang terdiri daripada 5 profesor dipilih secara rawak untuk membentuk visi dan misi kolej tersebut. Biarkan X dan Y mewakili bilangan profesor lelaki dan wanita dalam jawatan kuasa ini masing-masing.

- (i) *Cari fungsi ketumpatan tercantum X dan Y .*
- (ii) *Cari p_x dan p_y , iaitu fungsi ketumpatan sut X dan Y .*

- (c) The distribution of the grades of the students of probability and calculus at a certain university are $N(65, 418)$ and $N(72, 448)$, respectively. One lecturer teaches a calculus section with 28 and a probability section with 22 students. What is the probability that the difference between the averages of the final grades of these two classes is at least 2?

Taburan gred pelajar dalam ujian kebarangkalian dan kalkulus ialah $N(65, 418)$ dan $N(72, 448)$, masing-masing. Seorang pensyarah mengajar kursus kalkulus dan kebarangkalian yang mempunyai 28 dan 22 pelajar, masing-masing. Apakah kebarangkalian perbezaan min gred akhir 2 kursus ini adalah sekurang-kurangnya 2?

- (d) (i) In a multiple-choice test with false answers receiving negative scores, the mean of the grades of the students is 0 and its standard deviation is 15. Find an upper bound for the probability that a student's grade is at least 45.
- (ii) Let the joint probability density function of random variables X and Y be:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find $E(X)$, $E(Y)$, and $E(X^2 + Y^2)$

- (i) Dalam suatu ujian pelbagai pilihan jawapan yang salah akan diberi skor negatif, min gred pelajar-pelajar ialah 0 dan sisihan piawai 15, masing-masing. Cari had atas kebarangkalian supaya gred seorang pelajar adalah sekurang-kurangnya 45.
- (ii) Biarkan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum pembolehubah rawak X dan Y sebagai:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukan $E(X)$, $E(Y)$, dan $E(X^2 + Y^2)$

[25 markah/marks]

- 000 O 000 -