UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examinations
Academic Session 2004/2005

October 2004

MGM 511 – LINEAR ALGEBRA AND CODING THEORY
[ALJABAR LINEAR DAN TEORI PENGKODAN]

Duration: 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **FOUR [4]** pages of printed material before you begin the examination.

Answer **all SEVEN** questions.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

*Jawab **semua TUJUH** soalan.*

1. Suppose A and B are $n \times n$ upper triangular matrices and k is a scalar. Prove that

   (i) $A+B$, kA and AB are triangular matrices.
   (ii) For any polinomial $f(x)$, the matrix $f(A)$ is triangular.
   (iii) A is invertible if and only if each diagonal element of A is non-zero, and when A^{-1} exists, it is also triangular.

[100 marks]

1. Andaikan A dan B merupakan matriks segi tiga bahagian atas $n \times n$ dan k merupakan suatu skalar. Buktikan bahawa

   (i) $A+B$, kA dan AB merupakan matriks segi tiga.
   (ii) Bagi sebarang polinomial $f(x)$, matriks $f(A)$ adalah matriks segi tiga.
   (iii) A tersongsangkan jika dan hanya jika setiap pemasukan dalam pepenjuru A bukan sifar, dan apabila A^{-1} wujud, ia juga matriks segi tiga.

[100 markah]

2. Show that the matrix $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}$ is unitary.

[100 marks]

2. Tunjukkan bahawa matriks $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \end{bmatrix}$ adalah unitari]

[100 markah]

3. (i) State the definition of a vector space.

   (ii) Given the vector space V over a field K, prove using your definition, that for any $k \in K$ and any $\underset{\sim}{u} \in V$, $(-k)\underset{\sim}{u} = k(-\underset{\sim}{u}) = -(k\underset{\sim}{u})$.

[100 marks]

3. (i) Nyatakan takrif ruang vektor.

   (ii) Diberi V suatu ruang vektor atas suatu medan skalar K, buktikan dengan menggunakan takrif anda bahawa bagi sebarang $k \in K$ dan sebarang $\underset{\sim}{u} \in V$, $(-k)\underset{\sim}{u} = k(-\underset{\sim}{u}) = -(k\underset{\sim}{u})$.

[100 markah]

4. Given $U = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ and $V = \{(0,x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, show that $U, V, U \cap V$ and $U \oplus V$ are subspaces of $\mathbb{R}^3$. Then obtain a basis for each of the four subspaces above and state their dimensions.

[100 marks]

4. Diberi $U = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ dan $V = \{(0,x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ tunjukkan bahawa $U, V, U \cap V$ dan $U \oplus V$ masing-masing merupakan subruang bagi $\mathbb{R}^3$. Seterusnya dapatkan suatu asas bagi setiap subruang di atas dan nyatakan dimensi mereka.

[100 markah]

5. Given the linear map

$G : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ defined by

$$G(x,y,z,s,t) = (x + 2y + 2z + 5 + t,\ x + 2y + 3z + 2s - t,\ 3x + 6y + 8z + 5s - t),$$

find a basis and the dimension of the kernel and the image of G.

[100 marks]

5. Diberikan pemetaan linear

$G : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ *dengan*

$$G(x,y,z,s,t) = (x + 2y + 2z + 5 + t,\ x + 2y + 3z + 2s - t,\ 3x + 6y + 8z + 5s - t),$$

Cari suatu asas dan dimensi masing-masing bagi inti serta imej bagi G.

[100 markah]

6. The set $S = \{e^{3t}, te^{3t}, t^2 e^{3t}\}$ is a basis of a vector space V of functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Let D be the differential operator on V, that is, $D(f) = df/dt, \forall f \in V$. Find the matrix representation of D relative to the basis S.

[100 marks]

6. Set $S = \{e^{3t}, te^{3t}, t^2 e^{3t}\}$ merupakan suatu asas bagi ruang vektor V yang mengandungi fungsi-fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Biar D mewakili operator pembezaan atas V, iaitu $D(f) = df/dt, \forall f \in V$. Cari matriks perwakilan bagi D relatif kepada asas S.

[100 markah]

7. Let U be the subspace of $\mathbb{R}^4$ spanned by $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, 2, 2)$ and $(1, 2, -3, -4)$.

   (i) Apply the Gram-Schmidt algorithm to find an orthogonal and orthonormal basis for U.

   (ii) Find the projection of $(1, 2, -3, 4)$ onto U.

[100 marks]

7. Biar U merupakan subruang bagi $\mathbb{R}^4$ yang direntang oleh $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, 2, 2)$ dan $(1, 2, -3, -4)$.

   (i) Gunakan algoritma Gram-Schmidt untuk mencari suatu asas berortogon and ortonormal bagi U.

   (ii) Cari unjuran bagi $(1, 2, -3, 4)$ ke atas U.

[100 markah]

- ooo O ooo -