

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2004/2005

October 2004

MGM 503 – COMBINATORIES
[KOMBINATORIK]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **NINE [9]** pages of printed material before you begin the examination.

Answer **all TEN** questions.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **SEMBILAN [9]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Jawab **semua SEPULUH** soalan.

Each question is worth 10 marks. Answer all questions.
Setiap soalan bernilai 10 markah. Jawab semua soalan.

For Question 1- Question 4, you do not need to generate written explanations.
Untuk Soalan 1 – Soalan 4, anda tidak perlu menjanakan penjelasan bertulis.

...2/-

1. (a) There are 6 ways to complete Task *A* and 10 ways to complete Task *B*. Assume that Task *A* and Task *B* are independent events that share no common elements.
- (i) How many different ways exist to complete Task *A* or Task *B*?
- (ii) How many different ways exist to complete Task *A* and then Task *B*?
[3 marks]
- (b) 40 students are to be arranged in a single line. How many arrangements are there for these students?
[2 marks]
- (c) How many distinct arrangements exist for the letters in the word INSURRECTIONISTS?
[3 marks]
- (d) How many different **birth-order arrangements** are possible for a couple whose seven children consist of three sons and four daughters? (Do not consider multiple births such as twins or triplets.)
[2 marks]
1. (a) Terdapat 6 cara untuk melengkapkan Tugas *A* dan 10 cara untuk melengkapkan Tugas *B*. Andai Tugas *A* dan Tugas *B* tidak mempunyai kaitan antara satu sama lain.
- (i) Berapakah cara yang berbeza wujud dalam melengkapkan Tugas *A* atau Tugas *B*?
- (ii) Berapakah cara yang berbeza wujud dalam melengkapkan Tugas *A* dan Tugas *B*?
[3 markah]
- (b) 40 pelajar perlu disusun dalam satu barisan. Berapakah susunan yang ada untuk pelajar-pelajar ini?
[2 markah]
- (c) Berapakah susunan berbeza yang wujud untuk huruf-huruf dalam perkataan INSURRECTIONISTS?
[3 markah]
- (d) Berapakah susunan aturan-kelahiran berbeza yang wujud untuk suatu pasangan yang tujuh orang anaknya terdiri daripada tiga anak lelaki dan tiga anak perempuan? (Jangan pertimbangkan kelahiran berganda seperti kembar dua atau kembar tiga).
[2 markah]

2. (a) There are 12 members in a committee who sit around a table. There is 1 place specially designated for the chairman. Other than the chairman, there are 3 people who constitute a subcommittee.
- (i) Find the number of seating arrangements, if the subcommittee sit together as a block
- (ii) Find the number of seating arrangements, if no two of the subcommittee sit next to each other

[4 marks]

- (b) A recursive relationship has first term $t(1) = -4$ with

$$t(n) = -2t(n-1) + 3.$$

Determine the value of $t(4)$.

[2 marks]

- (c) Chong had to answer the following question:

Halim's Cafe serves three different sandwiches: a cheese sandwich that sells for RM2, a tuna sandwich that sells for RM4, and a deluxe veggie sandwich for RM5. How many ways are there to spend RM16 for sandwiches at Halim's Cafe?

To answer the question, Chong created a generating function that, when expanded, included the following terms:

$$\begin{aligned} & \dots + x^7 + 3x^8 + 2x^9 + 4x^{10} + 2x^{11} + 5x^{12} + 3x^{13} \\ & \quad + 6x^{14} + 4x^{15} + 7x^{16} + 5x^{17} + 7x^{18} + 6x^{19} + \dots \end{aligned}$$

What answer did Chong provide, based on the expansion shown here?

[2 marks]

- (d) State the explicit formula for the number of derangements of n distinct items.

[2 marks]

2. (a) Terdapat 12 ahli dalam suatu jawatankuasa yang duduk di keliling suatu meja bulat. Ada 1 tempat duduk yang dikhaskan untuk pengerusi. Selain dari pengerusi, terdapat 3 orang yang membentuk suatu jawatankuasa kecil.

- (i) Cari bilangan tempat duduk, jika ahli-ahli jawatankuasa kecil itu duduk bersama-sama sebagai satu blok
- (ii) Cari bilangan tempat duduk, jika tiada mana-mana dua ahli jawatankuasa kecil yang duduk bersebelahan.

[4 markah]

- (b) Suatu perhubungan rekursi mempunyai sebutan pertama $t(1) = -4$ dengan

$$t(n) = -2t(n-1) + 3.$$

Tentukan nilai bagi $t(4)$.

[2 markah]

- (c) Chong perlu menjawab soalan berikut:

Kedai Kopi Halim menghidangkan tiga jenis sandwich yang berbeza: sandwich keju yang dijual pada harga RM2 setiap satu, sandwich telur yang dijual pada harga RM4 setiap satu, dan sandwich tuna yang dijual pada harga RM5 setiap satu. Berapakah cara untuk membelanjakan RM16 bagi sandwich di Kedai Kopi Halim?

Untuk menjawab soalan ini, Chong membina suatu fungsi penjanan yang, bila dikembangkan, termasuk sebutan-sebutan berikut:

$$\begin{aligned} & \dots + x^7 + 3x^8 + 2x^9 + 4x^{10} + 2x^{11} + 5x^{12} + 3x^{13} \\ & \quad + 6x^{14} + 4x^{15} + 7x^{16} + 5x^{17} + 7x^{18} + 6x^{19} + \dots \end{aligned}$$

Apakah jawapan yang diberi oleh Chong, berdasarkan kembangan yang ditunjukkan di sini?

[2 markah]

- (d) Nyatakan dengan jelas formula untuk bilangan kekeliruan bagi n barangan yang berbeza.

[2 markah]

3. (a) Replace a , b , and c in $C(21,a) = C(b,9) + C(c,10)$ to correctly illustrate Pascal's Formula.

[2 marks]

- (b) If we label the rows of Pascal's Triangle starting with $n = 0$ and the columns starting with $k = 0$, what is the value of the entry in row 14, column 11?

[2 marks]

- (c) At Timah's Restaurant, the Monday lunch special is Fried Rice. For RM5, customers choose one of 6 different kinds of fried rice and one of 8 different beverages. No additions or substitutions are allowed for this price. How many different RM5 fried rice/beverage options are there?

[3 marks]

- (d) Twenty (20) donuts are to be placed in a single line on a serving tray. Among the 20 donuts, there are 5 identical jelly donuts, 7 identical chocolate donuts, and 8 identical cream-filled donuts. How many different arrangements exist for these 20 donuts?

[3 marks]

3. (a) Gantikan a , b , dan c dalam $C(21,a) = C(b,9) + C(c,10)$ untuk mengilustrasikan Formula Pascal dengan betul.

[2 markah]

- (b) Jika kita labelkan baris-baris dari Segitiga Pascal bermula dengan $n = 0$ dan lajur-lajur bermula dari $k = 0$, apakah nilai bagi pemasangan dalam baris 14, lajur 11?

[2 markah]

- (c) *Di Restoran Timah, istimewa pada tengahari Isnin adalah Nasi Goreng. Untuk RM5, pelanggan boleh memilih satu daripada 6 jenis nasi goreng yang berbeza dan satu daripada 8 jenis minuman yang berbeza. Tiada penambahan atau penggantian yang dibenarkan pada harga ini. Berapakah pilihan nasi goreng/minuman RM5 yang ada?*
[3 markah]
- (d) *Dua puluh (20) donat perlu dibubuh dalam satu baris pada dulang hidangan. Di kalangan 20 donat tersebut, terdapat 5 donat berjeli yang serupa, 7 donat coklat yang serupa, dan 8 donat berisi krim yang serupa. Berapakah susunan berbeza yang wujud untuk 20 donat ini?*
[3 markah]
4. (a) One version of the current automobile license plates issued in Minnesota shows three letters followed by a three-digit number. If no letter or digit may be repeated, how many unique license plates of this format can be created?
[2 marks]
- (b) A group of 15 people are to be separated into three rooms called the Blue Room, the Green Room, and the White Room. If there are no restrictions on how many people go in each room, and we are only concerned with the number of people in each room, how many ways can the separation occur?
[2 marks]
- (c) Aminah works 10 blocks west and 12 blocks south of her apartment. All streets from her apartment to her workplace are laid out in a rectangular grid, and all of them are available for walking. On her walk to work, Aminah stops at an ATM that is located 3 blocks west and 5 blocks south of her apartment. On her way home from work, Aminah stops at Tesco, located 7 blocks north and 3 blocks east of her workplace. If she walks 22 blocks from her apartment to work and 22 blocks from work to her apartment, how many different round-trip paths are possible for Aminah, given the stops she makes along the way?
[3 marks]
- (d) A passbook savings account earns 5% interest compounded annually. An initial deposit of RM8000 is made. If no additions or withdrawals are made to the account, write a recurrence relation with initial conditions for $b(n)$, the balance in the account after n years.
[3 marks]
4. (a) *Satu versi untuk plat lesen otomobil terkini dalam Minnesota menunjukkan tiga huruf diikuti dengan tiga digit nombor. Jika tiada huruf yang boleh diulang, berapakah plat lesen berbeza yang boleh dibentuk dengan format tersebut?*
[2 markah]

- (b) *Sekumpulan 15 orang akan dipisahkan ke dalam tiga bilik yang dipanggil Bilik Biru, Bilik Hijau dan Bilik Putih. Jika tiada batasan ke atas berapa orang yang memasuki setiap bilik, dan kita hanya mengambil berat tentang bilangan orang dalam setiap bilik, berapakah cara untuk pemisahan ini berlaku?*

[2 markah]

- (c) *Aminah bekerja 10 blok ke barat dan 12 blok ke selatan dari tempat kediamannya. Semua jalan dari tempat kediamannya ke tempat kerjanya dibentangkan dalam suatu grid bersegiempat tepat, dan semuanya boleh digunakan dengan berjalan kaki. Dalam perjalanannya ke tempat kerja, Aminah berhenti di suatu ATM yang terletak 3 blok ke barat dan 5 blok ke selatan dari tempat kediamannya. Dalam perjalanan pulang dari kerja, Aminah berhenti di Tesco, yang terletak 7 blok ke utara dan 3 blok ke timur dari tempat kerjanya. Jika dia berjalan 22 blok dari tempat kediamannya, berapakah laluan pergi-balik yang berbeza yang ada untuk Aminah, sekiranya dia melakukan persinggahan-persinggahan tersebut dalam perjalanannya?*

[3 markah]

- (d) *Suatu buku akaun simpanan mendapat faedah 5% yang dikira secara tahunan. Suatu deposit permulaan RM80000 dilakukan. Jika tiada penambahan atau pengeluaran dilakukan ke atas akaun tersebut, tulis suatu hubungan rekursi dengan keadaan permulaan bagi $b(n)$, baki dalam akaun selepas n tahun.*

[3 markah]

5. Consider the expansion of $(k + e + n + d + u + r + i)^{555}$.

- (a) Determine the number of uncollected terms in the expansion.

[2 marks]

- (b) Determine the number of collected terms in the expansion.

[2 marks]

- (c) Determine the coefficient C for the collected term $C * k^{111} e^{111} n^{333}$.

[3 marks]

- (d) How many collected terms in the expansion are of the form $K * x^r y^s z^t$ (r, s and t are positive integers), where x, y , and z are distinct elements from the set $\{k, e, n, d, u, r, i\}$?

[3 marks]

5. *Pertimbangkan kembangan bagi $(k + e + n + d + u + r + i)^{555}$.*

- (a) *Tentukan bilangan sebutan tak terkumpul dalam kembangan ini.*

[2 markah]

- (b) *Tentukan bilangan sebutan terkumpul dalam kembangan ini.*

[2 markah]

...71-

- (c) Tentukan koefisien C untuk sebutan terkumpul $C * k^{111} e^{111} n^{333}$.
[3 markah]
- (d) Berapakah bilangan sebutan terkumpul dalam kembangan ini yang mempunyai bentuk $K * x^r y^s z^t$ (r, s dan t adalah integer positif), dengan x, y , dan z merupakan unsur-unsur berbeza dari set $\{k, e, n, d, u, r, i\}$?
[3 markah]
6. The set of letters $\{P, P, P, Q, Q, Q, Q, R, R\}$ is to be used to create subsets with k elements in them.
- (a) State the range of values for k that is possible for this situation.
[2 marks]
- (b) How many subsets in all can be created from the set?
[2 marks]
- (c) Create a generating function that can be used to determine the number of 6-element subsets that will have at least one Q and at least two P s. Show the factors of the generating function but **do not expand the expression**. Explain what each factor represents within the context of this problem.
[3 marks]
- (d) Explain what you would do with this generating function in order to determine the number of 6-element subsets that will have at least one Q and at least two P s.
[3 marks]
6. Set huruf $\{P, P, P, Q, Q, Q, Q, R, R\}$ digunakan untuk membina subset dengan k unsur di dalamnya.
- (a) Nyatakan julat bagi nilai k yang mungkin bagi situasi ini.
[2 markah]
- (b) Berapakah subset yang boleh dibentuk kesemuanya?
[2 markah]
- (c) Bina suatu fungsi penjana yang boleh digunakan untuk menentukan bilangan subset 6 unsur yang mempunyai sekurang-kurangnya satu Q dan sekurang-kurangnya dua P . Tunjukkan faktor-faktor dalam fungsi penjana tersebut tetapi jangan kembangkan ungkapannya. Jelaskan apakah yang digambarkan oleh setiap faktor dalam konteks masalah ini.
[3 markah]
- (d) Jelaskan apakah yang anda akan buat dengan fungsi penjana ini untuk menentukan bilangan subset 6 unsur yang akan mempunyai sekurang-kurangnya satu Q dan sekurang-kurangnya dua P .
[3 markah]

7. Cik Hajar had watched the movie *Mary Poppins* ten times and was intrigued by the word **SUPERCALLIFRAGILISTICEXPIALIDOCIOUS**. Help her find out :
- (a) how many arrangements of the letters in that word if the vowels must be together;
[5 marks]
- (b) how many arrangements of the letters in that word if each arrangement must begin and end with a consonant?
[5 marks]
7. *Cik Hajar telah menonton filem Mary Poppins sebanyak sepuluh kali dan amat terpesona dengan perkataan SUPERCALLIFRAGILISTICEXPIALIDOCIOUS. Bantu beliau untuk mengetahui :*
- (a) *berapakah susunan huruf-huruf dalam perkataan tersebut jika semua vokal mesti bersama-sama;*
[5 markah]
- (b) *berapakah susunan huruf-huruf dalam perkataan tersebut jika setiap susunan mesti bermula dan berakhir dengan konsonan.*
[5 markah]
8. In a group of 5 people, show that there are two who have the same number of acquaintances in the group. Generalize your result to show that in a group of n people, there are two who have the same number of acquaintances.
[Note: In this situation, two people either are acquainted or they are not acquainted and a person cannot be acquainted with him/herself.]
[10 marks]
8. *Dalam sekumpulan 5 orang, tunjukkan bahawa terdapat dua orang yang mempunyai bilangan kenalan yang sama. Kemudian, buat pernyataan umum untuk menunjukkan bahawa dalam suatu kumpulan n orang, terdapat dua orang yang mempunyai bilangan kenalan yang sama.*
[Perhatian: Dalam situasi ini, samada dua orang adalah saling mengenali atau tidak saling mengenali dan dirinya sendiri tidak dikira sebagai kenalan.]
[10 markah]
9. A *perfect cover* of an m -by- n chess board by dominoes is an arrangement so that (i) the entire board is covered, (ii) each domino covers a whole number of squares and (iii) there is no overlap except along the edges. Create a recursive relationship $f(n)$ that represent the number of perfect covers possible for a 2-by- n chessboard.
[10 marks]
9. *Suatu litupan sempurna bagi papan catur m -dengan- n oleh domino ialah suatu susunan supaya (i) keseluruhan papan dilitupi, (ii) setiap domino melitupi keseluruhan segiempat (iii) tiada pertindihan kecuali di sisi. Bina suatu perhubungan rekursi $f(n)$ yang mewakili bilangan litupan sempurna yang mungkin untuk suatu papan catur 2-dengan- n .*
[10 markah]

10. Peter's mother lives in a retirement community. Among all individual residents within the community, we know that:

- 38 play golf
- 21 play tennis
- 56 play bridge
- 8 play golf and tennis
- 17 play golf and bridge
- 13 play tennis and bridge
- 5 play golf, tennis, and bridge
- 72 do not play golf, tennis, nor bridge

(a) How many individual residents are there in this retirement community?
[5 marks]

(b) How many of the individual residents participate in only and exactly one of the three activities?
[5 marks]

10. *Ibu Peter tinggal dalam masyarakat yang berpencen. Di kalangan penduduk dalam masyarakat tersebut, kita ketahui bahawa:*

- 38 bermain golf
- 21 bermain tenis
- 56 bermain "bridge"
- 8 bermain golf dan tenis
- 17 bermain golf dan "bridge"
- 13 bermain tenis dan "bridge"
- 5 bermain golf, tenis, dan "bridge"
- 72 tidak bermain golf, tennis, ataupun "bridge"

(a) *Berapa ramaikah penduduk dalam masyarakat berpencen ini?*
[5 markah]

(b) *Berapa ramaikah penduduk yang menyertai hanya satu dari tiga aktiviti tersebut?*
[5 markah]