UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

JIM 311 – Analisis Vektor

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Diberi dua vektor

$$\underline{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} \text{ dan } \underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}.$$

Cari

(i) hasil darab skalar $\underline{a} \cdot \underline{b}$

(ii) hasil darab vektor $\underline{a} \times \underline{b}$

(iii) magnitud $|\underline{a} + \underline{b}|$.

(35 markah)

(b) Tentukan nilai α supaya vektor-vektor $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\underline{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ dan $\underline{c} = \alpha\hat{i} - \hat{j} + \alpha\hat{k}$ sesatah.

(30 markah)

(c) Jika sudut di antara vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ ialah 60°, dan $|\underline{a}| = |\underline{b}| = 3$, tunjukkan bahawa $|\underline{a} - \underline{b}| = 3$.

(35 markah)

2. (a) Suatu satah melalui tiga titik yang bervektor kedudukan $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\underline{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ dan $\underline{c} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$. Cari persamaan vektor bagi satah tersebut dalam bentuk hasil darab skalar dan seterusnya dapatkan jarak satah dari asalan.

(50 markah)

(b) Buktikan dua garis lurus

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-7}{2},$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{6}$$

bersilang. Cari sudut di antara dua garis tersebut.

(50 markah)

3. (a) Diberi medan skalar

$$\phi(x, y, z) = -2xy + x \log_e (y+z).$$

Cari magnitud dan arah bagi kadar perubahan maksimum $\phi(x, y, z)$ pada titik (1, 3, -2).

(30 markah)

(b) Pertimbangkan medan vektor

$$\underline{F} = 3x^2\hat{i} + 2yz^3\hat{j} + ay^2z^2\hat{k},$$

di mana a adalah pemalar.

(i) Nilaikan $\underline{\nabla} \cdot \underline{F}$ dan $\underline{\nabla} \times \underline{F}$

(ii) Tentukan nilai a supaya $\underline{F}$ adalah medan ketakputaran. Untuk nilai a tersebut, cari medan skalar ϕ supaya

$$\underline{F} = \underline{\nabla}\phi.$$

(40 markah)

(c) Cari vektor normal unit $\underline{\hat{n}}$ kepada suatu permukaan $z = x^2 + y^2$ di titik (1, 0, 1).

(30 markah)

4. (a) Tiga daya $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ dan $\underline{F}_3$ bertindak ke atas suatu zarah. Daya $\underline{F}_1$ mempunyai magnitud 14 N dan bertindak dalam arah yang selari dengan garis lurus $\underline{r} = \hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k} + \lambda(6\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$. Daya $\underline{F}_2 = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, manakala daya $\underline{F}_3$ diwakili oleh garis tembereng AB (dalam magnitud dan arah) di mana A dan B masing-masing mempunyai vektor kedudukan $7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ dan $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$. Cari nilai a, b, dan c jika zarah tersebut ***tidak*** memecut.

(55 markah)

(b) Diberi medan vektor

$$\underline{F} = \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}\hat{i} + \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}\hat{j} + \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\hat{k}$$

tunjukkan kamiran garis

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

tidak bersandar kepada sebarang lintasan C. Jika lintasan C diberi oleh persamaan parameter

$$\underline{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^4\hat{k} \text{ untuk } 0 \le t \le 1,$$

nilaikan kamiran garis tersebut.

(45 markah)

5. (a) Nyatakan teorem Gauss.

Tunjukkan

$$\iint_S \underline{F} \times d\underline{S} = -\iiint_V \underline{\nabla} \times \underline{F}\, dV$$

dengan menyatakan syarat-syarat yang harus ditepati oleh $\underline{F}$ serta hubungan permukaan S dengan isipadu V.

[Petunjuk: Guna teorem Gauss ke atas medan vektor $\underline{F} \times \underline{a}$, di mana $\underline{a}$ adalah medan vektor malar sebarangan. Anda boleh menggunakan identiti

$[\underline{\nabla} \cdot (\underline{F} \times \underline{G}) = \underline{G} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{F} - \underline{F} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{G}]$

(50 markah)

(b) Nyatakan teorem Stokes.

Jika diberi medan vektor

$$\underline{F} = (1-z)y\hat{i} + ze^{x}\hat{j} + x\sin z\hat{k}$$

dan S ialah hemisfera $z = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$, nilaikan kamiran permukaan

$$\iint_S (\underline{\nabla} \times \underline{F})\, d\underline{S}$$

dengan menggunakan teorem Stokes.

(50 markah)

- ooo0ooo -