UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2008/2009

November 2008

**MST 562 – Stochastic Processes**
***[Proses Stokastik]***

Duration : 3 hours
*[Masa : 3 jam]*

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions**: Answer **all four** [4] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua empat** [4] soalan.]*

1. (a) Independent trials each resulting in a success with probability $p$, are successively performed. Let $X$ be the time of the first success. By conditioning on $X$, where

$$Y = \begin{cases} 1, & \textit{if the first trial is a success} \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

find $E(X)$ and $Var(X)$.

(b) Write short notes on the following:

(i) recurrent state
(ii) transient state
(iii) stationary and independent increment

(c) An individual has $r$ umbrellas which he uses in going from his home to his office and vice versa. If he is at home (the office) at the beginning (end) of the day and it is raining, then he will take an umbrella with him to the office (home), provided there is one to be taken. If it is not raining, then he never takes an umbrella. Assume that, independent of the past, it rains at the beginning (end) of a day with probability $p$. Let $X_n$ denotes the number of umbrellas the individual has at his disposal at the moment he begins his $n$th trip.

(i) Define a Markov chain with $r + 1$ classes and find its transition probability matrix.
(ii) Find the limiting probabilities.
(iii) What fraction of the time does the individual get wet?

[100 marks]

2. (a) Customers arrive at a fast food restaurant according to a Poisson process with rate 15 per hour. A single server is on duty and the time taken to serve each customer is exponentially distributed with a mean of 2 minutes. All arriving customers join and stay in the system regardless of how many other customers are queueing.

(i) What is the probability that more than one customer arrives during a given 4 minute period?
(ii) When it is 5 minutes since the last customer arrived, what is the probability of exactly one arrival in the next 4 minutes?
(iii) Find the average fraction of time that the server is busy.

1\. (a) *Percubaan saling tak bersandar dijalankan berturut-turut dan setiap satu menghasilkan kejayaan dengan kebarangkalian p. Andaikan X ialah masa kejayaan pertama. Dengan bersyaratkan Y, di mana*

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{jika percubaan pertama menghasilkan kejayaan} \\ 0, & \text{sebaliknya} \end{cases}$$

*dapatkan* $E(X)$ *dan* $Var(X)$.

(b) *Tuliskan nota pendek mengenai yang berikut:*

(i) *keadaan jadi semula*
(ii) *keadaan fana*
(iii) *peningkatan pegun dan peningkatan tak bersandar*

(c) *Seorang individu mempunya r kaki payung yang digunakannya bila ke pejabat dari rumah dan sebaliknya. Jika ia di rumah (di pejabat) pada awal (akhir) hari dan hari sedang hujan, ia akan membawa sekaki payung dengannya ke pejabat (rumah), dengan syarat ada payung untuk dibawa. Jika hari tidak hujan, ia tidak akan membawa payung. Andaikan bahawa kebarangkalian hujan pada awal (akhir) hari ialah p dan tidak bergantung kepada peristiwa sebelumnya. Andaikan* $X_n$ *mewakili bilangan payung yang ada pada individu tersebut untuk digunakan bila masa ia memulakan perjalanannya yang ke-n.*

(i) *Takrifkan suatu rantai Markov dengan* $r + 1$ *kelas dan dapatkan matriks kebarangkalian peralihannya.*
(ii) *Dapatkan kebarangkalian- kebarangkalian penghad.*
(iii) *Berapahkah pecahan masa individu tersebut basah?*

*[100 markah]*

2\. (a) *Pelanggan-pelanggan tiba di sebuah restoran makanan segera menurut suatu proses Poisson dengan kadar 15 orang setiap jam. Seorang pelayan sedang bertugas dan masa yang digunakan untuk melayan setiap pelanggan tertabur secara eksponen dengan min 2 minit. Semua pelanggan yang tiba memasuki sistem dan berada dalam sistem tanpa mengambil kira bilangan pelanggan yang sedang beratur.*

(i) *Berapakah kebarangkalian bahawa lebih daripada seorang pelanggan tiba semasa suatu jangkamasa 4 minit?*
(ii) *Apabila 5 minit berlalu semenjak pelanggan terakhir tiba, berapakah kebarangkalian bahawa terdapat tepat satu ketibaan dalam 4 minit selanjutnya.*
(iii) *Dapatkan purata pecahan masa dimana pelayan tersebut sibuk.*

(b) A branching chain $\{X_n, n \geq 0\}$ is such that the number of offspring of a particle is given by a random variable $Z$. Let $\mu$ and $\sigma^2 (= E(Z-\mu)^2)$ denote the mean and the variance of $Z$, respectively.

(i) Find $E[X_{n+1} | X_n = k]$ in terms of $\mu$ and $\sigma^2$.
(ii) Show that $E[X_n] = \mu^n E[X_0]$.
(iii) Suppose Z has distribution $P(Z = k) = p(1-p)^k$, $k = 0,1,2,...$ and $0 < p < 1$. Find the probability of extinction of the chain.

(c) Let $X_1, X_2, \ldots$ denote the interarrival times of events of a nonhomogeneous Poisson process having intensity function $\lambda(t)$.

(i) Are the $X_i$'s independent and identically distributed? Explain your answer.
(ii) If $\lambda(t) = 3t + 1$, what is the probability that $n$ events occur between time $t = 3$ and $t = 5$?

[100 marks]

3. (a) An insurance company pays out claims on its life insurance policies in accordance with a Poisson process having rate $\lambda = 7$ per week. The amount of money paid on each policy is exponentially distributed with mean RM5,000.

(i) What is the expected time until the tenth claim arrives?
(ii) Calculate the mean and variance of the amount of money paid by the insurance company in a month?

(b) A job shop consists of three machines and two repairmen. The amount of time a machine works before breaking down is exponentially distributed with mean 10. Suppose that the amount of time it takes a single repairmen to fix a machine is exponentially distributed with mean 8. Let $X(t)$ be the number of machines that are down at time $t$.

(i) Show that $\{X(t), t \geq 0\}$ is a birth and death process. Find the birth rates and the death rates.
(ii) Find the limiting probabilities $P_i$, $i = 0,1,2,3$.
(iii) What is the average number of machines not in use?
(iv) What proportion of time is both repairmen busy?

(c) Consider two machines, both of which have an exponential lifetime with mean $1/\lambda$. There is a single repairman that can service machines at an exponential rate $\mu$. Set up the Kolmogorov backward equations.

[100 marks]

(b) *Suatu rantai bercabang* $\{X_n, n \geq 0\}$ *adalah sedemikian hingga bilangan anak suatu zarah diberikan oleh suatu pembolehubah rawak Z. Andaikan* $\mu$ *dan* $\sigma^2 (= E(Z-\mu)^2)$ *masing-masing mewakili min dan varians Z.*

(i) *Dapatkan* $E[X_{n+1} | X_n = k]$ *dalam sebutan* $\mu$ *dan* $\sigma^2$.

(ii) *Tunjukkan bahawa* $E[X_n] = \mu^n E[X_0]$.

(iii) *Andaikan Z mempunyai taburan* $P(Z=k) = p(1-p)^k, \quad k = 0,1,2,\ldots$ *dan* $0 < p < 1$. *Dapatkan kebaranglain pupus bagi rantai tersebut.*

(c) *Andaikan* $X_1, X_2, \ldots$ *mewakili masa antara-ketibaan bagi peristiwa-peristiwa proses Poisson tak homogen dengan fungsi ketumpatan* $\lambda(t)$.

(i) *Adakah* $X_i$ *tak bersandar dan tertabur secaman? Jelaskan jawapan anda.*

(ii) *Jika* $\lambda(t) = 3t + 1$, *berapakah kebarangkalian bahawa n peristiwa berlaku di antara masa* $t = 3$ *dan* $t = 5$?

*[100 markah]*

3. (a) *Sebuah syarikat insuran membayar tuntutan ke atas polisi insuran nyawa mengikut suatu proses Poisson dengan kadar* $\lambda = 7$ *setiap minggu. Amaun yang dibayar kepada setiap polisi tertabur secara eksponen dengan min RM5,000.*

(i) *Apakah masa jangkaan sehingga tuntutan kesepuluh tiba?*

(ii) *Hitung min dan varians bagi amaun yang dibayar oleh syarikat insuran tersebut dalam satu bulan?*

(b) *Sebuah kedai kerja mempunyai tiga buah mesin dan dua orang tukang baiki. Amaun masa sebuah mesin bekerja sebelum ia rosak tertabur secara eksponen dengan min 10. Jumlah masa yang diperlukan oleh seorang tukang baiki untuk membaiki sebuah mesin tertabur secara eksponen dengan min 8. Andaikan X(t) ialah bilangan mesin yang rosak pada masa t.*

(i) *Tunjukkan bahawa* $\{X(t), t \geq 0\}$ *ialah suatu proses kelahiran dan kematian. Dapatkan kadar-kadar kelahiran dan kematian.*

(ii) *Dapatkan kebarangkalian penghad* $P_i, \quad i = 0,1,2,3$.

(iii) *Berapakah purata bilangan mesin yang tidak digunakan?*

(iv) *Apakah kadaran masa di mana kedua-dua tukang baiki sibuk?*

(c) *Pertimbangkan dua buah mesin yang kedua-duanya mempunyai hayat eksponen dengan min* $1/\lambda$. *Terdapat seorang tukang baiki yang dapat membaiki mesin-mesin pada kadar eksponen* $\mu$. *Sediakan persamaan-persamaan kebelakang Kolmogorov.*

*[100 markah]*

4. (a) Prove the renewal equation

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x).$$

(b) A man works on a temporary basis. The mean length of each job he gets is 5 months. The amount of time he spends between jobs is exponentially distributed with mean 3 months. Let a renewal correspond to the time when he starts a new job.

(i) At what rate does the man get new jobs?
(ii) What is the limiting probability that the man is working?

(c) Suppose that potential customers arrive at a single-server bank in accordance with a Poisson process having rate $\lambda = 2$. A customer will only enter the bank if the server is free when he arrives. Suppose that the amount of time spent in the bank by an entering customer is a random variable having a distribution $G$ with mean 2.

(i) What is the rate at which customers enter the bank?
(ii) What proportion of potential customers actually enter the bank?

Suppose that the amounts deposited in the bank by successive customers are independent random variables uniformly distributed over [5, 10].

(iii) What is the rate at which deposits accumulate?

[100 marks]

4. (a) *Buktikan persamaan pembaharuan*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x).$$

(b) *Seorang lelaki bekerja secara sementara. Purata tempoh setiap kerja yang didapatinya ialah 5 bulan. Amaun masa yang dihabiskan antara kerja tertabur secara eksponen dengan min 3 bulan. Andaikan suatu pembaharuan bersamaan dengan masa apabila ia memulakan kerja baru.*

(i) *Apakah kadar lelaki tersebut mendapat kerja baru.*
(ii) *Berapakah kebarangkalian penghad bahawa lelaki tersebut bekerja?*

(c) *Andaikan bakal pelanggan-pelanggan tiba di sebuah bank satu-pelayan mengikut suatu proses Poisson dengan kadar* $\lambda = 2$. *Seorang pelanggan hanya akan masuk ke dalam bank jika pelayannya tidak sibuk apabila ia tiba. Andaikan amaun masa yang dihabiskan oleh seorang pelanggan yang masuk di dalam bank ialah suatu pembolehubah rawak yang mempunyai taburan G dengan min 2.*

(i) *Apakah kadar kemasukan pelanggan-pelanggan ke dalam bank?*
(ii) *Apakah kadaran bakal pelanggan-pelanggan yang sebenarnya memasuki ke dalam bank?*

*Andaikan amaun wang yang dimasukkan ke dalam bank oleh pelanggan-pelanggan berturutan ialah suatu pembolehubah rawak yang tertabur secara seragam pada [5, 10].*

(iii) *Apakah kadar penghimpunan wang yang dimasukkan?*

*[100 markah]*

- ooo O ooo -