
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2008/2009

November 2008

MSG 327 – Mathematical Modelling
[Pemodelan Matematik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of TEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all three** [3] questions.

[Arahan: Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

1. (a) Consider a small closed bottle containing BOD $\ell_0 = 5.0$ mg/L and DO $c_0 = 7.8$ mg/L initially. The levels of BOD and DO are then measured at regular intervals in the lab. With the help of figures, diagrams and tables describe and explain the time series of BOD and DO in this closed bottle. Then write the appropriate differential equations with initial conditions for BOD and DO, given that BOD decay rate $\alpha = 0.5$ per day. Solve the initial value problem and plot the analytical solutions for $t \in [0, \infty)$. All symbols used must be defined with proper dimensions and units.
- (b) Continuing from (a), now consider the case with the bottle open so that air can enter the bottle to re-aerate the water with re-aeration rate $\beta = 0.4$ per day and oxygen saturation is $c_s = 8.2$ mg/L. With the help of figures, diagrams and tables describe and explain the time series of BOD and DO in this open bottle. Then write the appropriate differential equations with initial conditions for BOD and DO. Solve the initial value problem and plot the analytical solution for $t \in [0, \infty)$.
- (c) Assume now that the BOD in the open bottle (b) remains constant at $\ell_0 = 5.0$ mg/L, due to controlled input of BOD. Then the equation for DO c mg/L is given by

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha\ell_0 + \beta(c_s - c), \quad c(0) = c_0 = 7.8, \quad \ell_0 = 5.0. \quad (1)$$

Explain clearly how Equation (1) is obtained. Then find the steady state solution. Solve and plot the solution to Equation (1) for $t \in [0, \infty)$.

- (d) Assume now that the open bottle contains algae and nutrients nitrogen and phosphorus and is placed under the sun. Describe and model the DO levels in this bottle, with sufficient details including diagrams.
- (e) Write the partial differential equations for BOD and DO for a uniform river using the same symbols given in (a), (b) and (c) above. Assume that the river has constant velocity $u = 0.1$ m/s and constant flow $Q = 2.0$ m³/s. A factory releases BOD into this river at $x = 0$ m that results in BOD = 6 mg/L and DO = 5mg/L at $x = 0$ m. Parameter values for this river are given as $\alpha = 0.6$ per day, $\beta = 1.2$ per day and oxygen saturation is $c_s = 8.0$ mg/L. Solve and plot the curve for BOD and DO as a function of distance downstream of $x = 0$ m after steady state is achieved. What is the minimum DO, where and when is this minimum achieved? You may assume that diffusion E is equal to 0.0 m²/s.

[100 marks]

1. (a) Pertimbangkan suatu botol tertutup kecil yang mengandungi BOD $\ell_0 = 5.0$ mg/L dan DO $c_0 = 7.8$ mg/L pada awalnya. Paras BOD dan DO diukur pada selang masa seragam dalam makmal. Dengan menggunakan rajah, diagram dan jadual huraikan dan jelaskan siri masa bagi BOD dan DO dalam botol tertutup ini. Kemudian tulis persamaan pembezaan yang sesuai dengan syarat awal bagi BOD dan DO, jika diberi kadar reputan BOD ialah $\alpha = 0.5$ sehari. Selesaikan masalah nilai awal ini dan plotkan penyelesaian analitikal untuk $t \in [0, \infty)$. Semua simbol yang digunakan mesti ditakrif dengan memberikan dimensi dan unit bersesuaian.
- (b) Berlanjutan daripada (a), sekarang pertimbangkan kes di mana botol ini terbuka supaya udara dapat masuk ke dalam botol ini dengan kadar pengudaraan semula $\beta = 0.4$ sehari dan ketepuan oksigen ialah $c_s = 8.2$ mg/L. Dengan bantuan rajah, diagram dan jadual huraikan dan jelaskan siri masa bagi BOD dan DO dalam botol terbuka ini. Kemudian tulis persamaan pembezaan yang sesuai dengan syarat awal bagi BOD dan DO. Selesaikan masalah nilai awal ini dan plotkan penyelesaian analitikal untuk $t \in [0, \infty)$.
- (c) Anggapkan sekarang BOD dalam botol terbuka (b) tersebut kekal malar pada nilai $\ell_0 = 5.0$ mg/L, disebabkan oleh kawalan input BOD. Maka, persamaan untuk DO c mg/L diberi sebagai

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha\ell_0 + \beta(c_s - c), \quad c(0) = c_0 = 7.8, \quad \ell_0 = 5.0. \quad (1)$$

Terangkan dengan jelas bagaimana Persamaan (1) boleh diperolehi. Kemudian cari penyelesaian pada keadaan mantap. Selesaikan dan plotkan penyelesaian Persamaan (1) untuk $t \in [0, \infty)$.

- (d) Sekarang, anggap bahawa botol terbuka tersebut mengandungi alga and nutrisi nitrogen dan fosforus dan diletakkan di bawah matahari. Huraikan dan modelkan paras DO dalam botol ini dengan butiran terperinci yang mencukupi termasuk diagram.
- (e) Tuliskan persamaan pembezaan separa untuk BOD dan DO untuk satu sungai seragam dengan menggunakan simbol sama yang diberikan di (a), (b) dan (c) di atas. Anggap bahawa sungai tersebut mempunyai halaju malar $u = 0.1$ m/s dan aliran malar $Q = 2.0$ m³/s. Satu kilang melepaskan BOD ke dalam sungai ini pada $x = 0$ m dan mengakibatkan BOD = 6 mg/L dan DO = 5 mg/L pada $x = 0$ m. Nilai parameter diberikan sebagai $\alpha = 0.6$ sehari, $\beta = 1.2$ sehari dan ketepuan oksigen ialah $c_s = 8.0$ mg/L. Selesaikan dan lakarkan graf untuk BOD dan DO sebagai satu fungsi jarak hilir dari $x = 0$ m selepas keadaan mantap tercapai. Apakah nilai minimum DO, di mana dan bila nilai minimum ini tercapai? Anda boleh andaikan bahawa sebaran E ialah 0.0 m²/s.

[100 markah]

2. (a) Let us now assume by convention that the basic units are meter (m) and second (s). A model for describing the dynamics of tide based upon the shallow water equations (SWE) incorporating friction and eddy viscosity is given as (2) and (3). Here, u is water velocity (m/s) and η is water elevation (m) above mean sea level. Derive these equations (2) and (3). Explain clearly the appropriate assumptions for the above model. Give the meaning and unit of g , R , E and h in the form of a table.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + Ru + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

- (b) Write a simplified model for a tide based upon (2) and (3) so that realistic analytical solutions are possible. Then verify that the progressive wave $\eta = a \cos(\sigma t - kx)$ and $u = a \sqrt{g/h} \cos(\sigma t - kx)$ is a solution to the simplified equation, provided that $k = \sigma / \sqrt{g/h}$. Give the meaning and unit of a , σ and k ? Suggest a solution in the form of a standing wave that satisfies the above simplified tidal model. Verify that this is indeed a solution. Explain what is meant by a progressive wave and a standing wave.
- (c) Imagine a narrow and uniform Western Channel in Penang that is open to a semi-diurnal tide at both ends. Explain in your own words what is meant by a semi-diurnal tide. You may use a table or a diagram. We may assume that this tide has a period of 12.00 hour. Plot in a diagram the tidal elevation over a period of 24 hours if the amplitude is 0.75 m. Now, further assume that this channel has a mean depth h of 8 m. Explain what is meant by mean depth with the help of diagram. Further, assume for simplicity that g is equal to 10.00 m/s^2 . Do you think that this assumption of $g = 10.00 \text{ m/s}^2$ is reasonable? Explain. Calculate and sketch η and u in the same figure if the tidal amplitude is 0.75 m. What are the frequency, wave number and wavelength of this tide?
- (d) Formulate in detail a staggered finite difference numerical scheme for solving the simplified tidal equation derived above. Pay attention to the implementation of boundary and initial conditions and give the stability criterion. Consider a section of the Western channel of length 5 km in (c) above. Use this scheme to solve this 5 km section of the Western channel with $DX = 1000 \text{ m}$, $DT = 60 \text{ s}$ for one time step, beginning with $t = 0.0 \text{ s}$. Is this scheme stable?

2. (a) Sekarang, biar kita anggap secara bersekutu bahawa unit-unit asas ialah meter (m) dan saat (s). Satu model untuk menerangkan dinamik pasang surut berdasarkan persamaan air cetek (SWE) dengan geseran dan kelikatan diberikan sebagai (2) dan (3). Di sini, u ialah halaju air (m/s) dan η ialah paras air (m) atas paras purata. Terbitkan persamaan-persamaan (2) dan (3). Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang sesuai untuk model di atas. Berikan maksud dan unit g , R , E dan h dalam bentuk jadual.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + Ru + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

- (b) Tulis satu model ringkas untuk pasang surut berdasarkan (2) dan (3) supaya penyelesaian analitikal yang realistik boleh diperolehi. Kemudian sahkan bahawa $\eta = a \cos(\sigma t - kx)$ dan $u = a\sqrt{g/h} \cos(\sigma t - kx)$ ialah penyelesaian kepada persamaan yang diringkaskan tersebut asalkan $k = \sigma / \sqrt{g/h}$. Berikan maksud dan unit bagi a , σ dan k ? Cadangkan satu penyelesaian dalam bentuk gelombang pegun yang memenuhi model pasang surut ringkas di atas. Sahkan bahawa ini merupakan satu penyelesaian. Jelaskan apa yang dimaksudkan oleh gelombang menjalar dan gelombang pegun.
- (c) Bayangkan satu Selat Barat sempit dan seragam di Pulau Pinang yang terbuka kepada pasang surut berkalaan semi-harian pada kedua-dua hujung. Jelaskan dengan menggunakan perkataan sendiri apakah yang dimaksudkan dengan pasang surut semi-harian. Anda boleh menggunakan jadual atau diagram. Kita boleh anggapkan bahawa pasang surut ini mempunyai kala 12.00 jam. Plotkan dalam satu diagram paras air atas paras purata untuk satu tempoh 24 jam jika amplitud ialah 0.75 m. Sekarang, anggapkan bahawa saluran ini mempunyai kedalaman purata h sedalam 8 m. Jelaskan apakah yang dimaksudkan dengan kedalaman purata dengan pertolongan diagram. Untuk meringkaskan lagi masalah tersebut, anggapkan g ialah 10.00 m/s^2 . Pada pendapat anda, adakah anggapan $g = 10.00 \text{ m/s}^2$ munasabah? Jelaskan. Dapatkan dan lakarkan η dan u dalam rajah yang sama jika amplitud pasang surut ialah 0.75 m. Apakah frekuensi, nombor gelombang dan panjang gelombang pasang surut ini?
- (d) Rumuskan secara terperinci satu kaedah berangka beza terhingga berperingkat untuk menyelesaikan persamaan pasang surut ringkas yang diterbitkan di atas. Beri perhatian kepada pelaksanaan syarat sempadan dan syarat awal dan berikan kriteria kestabilan. Pertimbangkan satu bahagian Selat Barat sepanjang 5 km di (c) di atas. Gunakan skema ini untuk menyelesaikan bahagian 5 km di (c) di atas dengan $DX = 1000 \text{ m}$, $DT = 60 \text{ s}$ untuk satu langkah masa, bermula dengan $t = 0.0 \text{ s}$. Adakah skema ini stabil?

- (e) A mega tsunami occurred on 26 December 2004 off the coast of Aceh, Indonesia. Explain what is meant by a tsunami. Can a tsunami be modeled by the shallow water equations SWE similar to (2) and (3)? Explain. Derive the partial differential equations in two dimensions for a simplified tsunami model so that analytical solutions are possible. Give and verify possible analytical solutions for this tsunami. Calculate the celerity of this tsunami if the mean depth is 1000 m. Calculate the travel time if the distance between Aceh and Penang is 800 km.

[100 marks]

3. (a) (i) A toy factory discharges toxic waste into Sg Pandai at $x = 0$ m. Derive the following partial differential equation to describe the distribution of this toxic pollutant assuming that the river is uniform.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc + W$$

Give the meaning and units for each term used in the form of a table.

- (ii) Given a sequence of time steps t_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, plot the curves of concentration versus distance $c(x, t_i)$ for each time step t_i in the same figure until steady state is achieved. Assume that the cross sectional area of the river is $A \text{ m}^2$, hence $Q = Au$. Derive the complete solution for the steady state concentration distribution $c(x)$ for $x \in (-\infty, \infty)$ in the form

$$c(x) = \begin{cases} c_0 e^{m_1 x}, & x \leq 0 \\ c_0 e^{m_2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$m_1 = \frac{u}{2E}(1 + \alpha), \quad m_2 = \frac{u}{2E}(1 - \alpha), \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{4kE}{u^2}}, \quad c_0 = \frac{W}{Q\alpha}.$$

- (iii) Assume that $E = 0.2 \text{ m}^2/\text{s}$, $u = 0.5 \text{ m/s}$, $Q = 2.5 \text{ m}^3/\text{s}$, $k = 2 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ and $W = 0.8 \text{ kgs}^{-1}$ at $x = 0$ km. Find and sketch the steady state concentration $c(x)$ for $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iv) Suppose now that an additional loading occur at $x = -8$ km with the loading $W = 1.6 \text{ kgs}^{-1}$. Find and sketch the steady state concentration profile for this new situation.

- (e) Satu mega tsunami berlaku pada 26 December 2004 di kawasan lepas pantai Aceh, Indonesia. Jelaskan apa yang dimaksudkan dengan tsunami. Bolehkah satu tsunami dimodelkan dengan persamaan air cetek SWE bersamaan dengan (2) dan (3)? Jelaskan. Terbitkan persamaan pembezaan separa dua dimensi untuk satu model tsunami yang ringkas supaya penyelesaian analitikal boleh diperolehi. Berikan dan sahkan penyelesaian analitikal yang mungkin untuk tsunami ini. Dapatkan celeriti tsunami ini jika kedalaman purata ialah 1000 m. Dapatkan masa perjalanan jika jarak di antara Aceh dan Penang ialah 800 km.

[100 markah]

3. (a) (i) Satu kilang barang permainan melepaskan sisa toksik ke dalam Sg Pandai pada $x = 0$ m. Terbitkan persamaan pembezaan separa berikut untuk menerangkan taburan bahan pencemar toksik ini dengan anggapan bahawa sungai tersebut adalah seragam.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc + W$$

Berikan maksud dan unit untuk setiap sebutan yang digunakan dalam bentuk jadual.

- (ii) Diberikan satu jujukan masa t_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, plotkan graf-graf kepekatan lawan jarak $c(x, t_i)$ untuk setiap langkah masa t_i dalam rajah yang sama sehingga keadaan mantap tercapai. Anggapkan luas keratan rentas sungai ialah A m², maka $Q = Au$. Terbitkan penyelesaian lengkap untuk taburan kepekatan $c(x)$ pada keadaan mantap untuk $x \in (-\infty, \infty)$ dalam bentuk

$$c(x) = \begin{cases} c_0 e^{m_1 x}, & x \leq 0 \\ c_0 e^{m_2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$m_1 = \frac{u}{2E}(1 + \alpha), \quad m_2 = \frac{u}{2E}(1 - \alpha), \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{4kE}{u^2}}, \quad c_0 = \frac{W}{Q\alpha}.$$

- (iii) Anggap bahawa $E = 0.2$ m²/s, $u = 0.5$ m/s, $Q = 2.5$ m³/s, $k = 2 \times 10^{-4}$ s⁻¹ dan $W = 0.8$ kgs⁻¹ pada $x = 0$ km. Cari dan lakarkan kepekatan $c(x)$ pada keadaan mantap untuk $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iv) Andaikan sekarang terdapat satu lagi punca pelepasan pada $x = -8$ km dengan kadar $W = 1.6$ kgs⁻¹. Cari dan lakarkan profil kepekatan pada keadaan mantap bagi situasi baru ini.

- (b) Solve the problem given in (a) (iii) above by numerical methods using finite segment with 3 segments, each of 2000 m, with one upstream and one downstream segment of the discharge point. Assume both upstream and downstream boundary conditions are 0.0 kg/m^3 . Sketch this solution and the solution obtained in (a) (iii) above in the same diagram. Discuss the accuracy.
- (c) The following three figures in the Appendix are data regarding DO dynamics in a small lake under the sun. The first is the daily solar radiation (Langley's), the second and third are chl a ($\mu\text{g/L}$) and DO (mg/L) levels simulated by WASP7 respectively. For each figure, explain clearly your understanding and interpretation of photosynthesis, using simple mathematical formula where appropriate. What is the period of oscillation for solar radiation, chl a and DO? Explain in words and mathematically. Derive and solve an appropriate initial value problem for DO subject to constant BOD and sinusoidal solar radiation.

[100 marks]

- (b) Selesaikan masalah yang diberikan di (a) (iii) di atas dengan menggunakan kaedah berangka dengan menggunakan segmen terhingga dengan 3 segmen, setiap satunya 2000 m, dengan satu segmen hulu dan satu segmen hilir dari titik pelepasan. Anggap bahawa kedua-dua nilai sempadan untuk hulu dan hilir ialah 0.0 kg/m^3 . Lakarkan penyelesaian ini dan penyelesaian di (a) (iii) atas dalam diagram yang sama. Bincangkan kejituannya.
- (c) Tiga rajah yang tercatat di dalam Lampiran adalah data berkenaan dinamik DO dalam satu tasik kecil yang terdedah kepada sinaran matahari. Rajah yang pertama ialah radiasi solar harian (Langleys), rajah yang kedua dan ketiga masing-masing ialah paras chl a ($\mu\text{g/L}$) dan DO (mg/L) yang disimulasi oleh WASP7. Untuk setiap rajah, terangkan dengan jelas pemahaman dan tafsiran anda terhadap fotosintesis dengan menggunakan formula matematik ringkas di mana sesuai. Apakah kala ayunan untuk radiasi solar, chl a dan DO? Terangkan dalam perkataan dan secara matematik. Terbitkan dan selesaikan satu masalah nilai awal untuk DO tertakluk kepada BOD malar dan radiasi solar sinusoidal.

[100 markah]

APPENDIX/LAMPIRAN

