UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2004/2005

March 2005

MGM 501 - ANALYSIS
[ANALISIS]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **FIVE [5]** pages of printed material before begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA [5]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

There are **SEVEN [7]** questions and each questions has **120 marks**.

Terdapat ***TUJUH [7]*** *soalan, dan tiap-tiap soalan berjumlah* ***120 markah.***

Answer **FIVE [5]** from **SEVEN [7]** questions.

Jawab ***LIMA [5]*** *dari* ***TUJUH [7]*** *soalan.*

1. (a) Prove that $n < 2^n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Show that if x and y are rational numbers, then $x + y$ and xy are rational numbers.

   (c) Show that if x is a rational number and y is an irrational number then $x + y$ is an irrational number.

   (d) Show that there does not exist a rational number s such that $s^2 = 6$.

1. (a) Buktikan $n < 2^n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

(b) Jika x dan y nombor-nombor nisbah, tunjukkan bahawa $x + y$ dan xy adalah juga nombor-nombor nisbah.

(c) Jika x adalah nombor nisbah dan y nombor tak nisbah, tunjukkan bahawa $x + y$ adalah satu nombor tak nisbah.

(d) Tunjukkan bahawa tidak wujud satu nombor nisbah s, supaya $s^2 = 6$.

2. (a) Let A be a nonempty bounded set in $\mathbb{R}$. Write the definitions of inf A and sup A.

   (b) Write down The Completeness Property of $\mathbb{R}$. Give an example to show that rational numbers $\mathbb{Q}$ does not have this property.

   (c) Let $A = \left\{1 - (1)^n / n : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   (i) Show that the set A is a bounded set in $\mathbb{R}$.
   (ii) Find inf A and sup A. Then prove your statement.

   (d) Suppose S is a bounded set in $\mathbb{R}$, and let S_0 be a nonempty subset of S. show that $\inf S \le \inf S_0 \le \sup S_0 \le \sup S$.

2. (a) Biarkan A satu set nombor nyata yang tidak kosong pada $\mathbb{R}$. Berikan takrifan inf A dan sup A.

(b) Nyatakan Teorem kelengkapan pada $\mathbb{R}$. Berikan satu contoh untuk menunjukkan set semua nombor nisbah $\mathbb{Q}$ tidak memenuhi Teorem kelengkapan pada $\mathbb{R}$ ini.

(c) Biarkan $A = \left\{1 - (1)^n / n : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(i) Tunjukkan bahawa set A adalah terbatas pada $\mathbb{R}$.
(ii) Cari inf A dan sup A. Seterusnya buktikan pernyataan anda itu.

(d) Andaikan S satu set yang terbatas pada $\mathbb{R}$, dan S_0 subset S yang tak kosong. Tunjukkan bahawa $\inf S \le \inf S_0 \le \sup S_0 \le \sup S$.

...3/-

3. (a) Write down the definition of $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

   (b) Give an example of two divergent sequences (x_n) and (y_n) such that $(x_n)+(y_n)$ is convergent.

   (c) Give an example of two divergent sequences (x_n) and (y_n) such that $(x_n).(y_n)$ is convergent.

   (d) Let $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ for $n \in \mathbb{N}$. Show that (y_n) and $\left(\sqrt{n}y_n\right)$ are both convergent, and then find their limits.

3. (a) Berikan takrifan untuk $had_{n\to\infty} x_n = x$.

   (b) Berikan satu contoh jujukan (x_n) dan (y_n) yang mencapah supaya $(x_n)+(y_n)$ menumpu.

   (c) Berikan satu contoh jujukan (x_n) dan (y_n) yang mencapah supaya $(x_n).(y_n)$ menumpu.

   (d) Biarkan $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahawa kedua-dua (y_n) dan $\left(\sqrt{n}y_n\right)$ menumpu dan seterusnya dapatkan had bagi kedua-dua jujukan ini.

4. (a) Let $x_1 \geq 2$ and $x_{n+1} := 1 + \sqrt{x_n - 1}$ for $n \in \mathbb{N}$. Prove that (x_n) is convergent by showing (x_n) is decreasing and bounded below. Then find the limit.

   (b) Show that every Cauchy sequence is bounded.

   (c) For each $n \in \mathbb{N}$, let $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. By considering $x_{2n} - x_n$, prove that (x_n) is not Cauchy.

4. (a) Biarkan $x_1 \geq 2$ dan $x_{n+1} := 1 + \sqrt{x_n - 1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahawa (x_n) menumpu dengan menunjukkan (x_n) menokok dan dibatasi dari bawah. Seterusnya dapatkan had (x_n).

   (b) Tunjukkan bahawa setiap jujukan Cauchy adalah terbatas.

   (c) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, biarkan $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Dengan mempertimbangkan $x_{2n} - x_n$, buktikan bahawa (x_n) adalah bukan Cauchy.

5. (a) Prove that $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}=0$

(b) Prove that $\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$ does not exist but $\lim_{x\to 0}x\cos(1/x)=0$.

(c) Write down the definition of a cluster point of a set.

(d) Let $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Show that every point in the interval $[0,1]$ is a cluster point of A.

5. (a) Buktikan bahawa $had_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}=0$.

(b) Buktikan bahawa $had_{x\to 0}\, kos(1/x)$ *tidak wujud tetapi* $had_{x\to 0}x\, kos(1/x)=0$.

(c) Berikan takrifan titik had bagi sesuatu set.

(d) Biarkan $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. *Tunjukkan bahawa, setiap titik di dalam selang* $[0,1]$ *adalah titik had set A.*

6. (a) Suppose the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ has limit L at 0, and let $a>0$. If $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is defined by $g(x)=f(ax)$, show that $\lim_{x\to 0}g(x)=L$.

(b) Let $c\in\mathbb{R}$ and let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be such that $\lim_{x\to c}(f(x))^2=K$.

(i) Show that if $K=0$, then $\lim_{x\to c}f(x)=0$.

(ii) Show by example that if $K\neq 0$, then f may not have a limit at c.

6. (a) Andaikan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *mempunyai had L pada 0, dan biarkan* $a>0$. *Jika* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ditakrifkan sebagai* $g(x)=f(ax)$, *tunjukkan* $had_{x\to 0}g(x)=L$.

(b) Biarkan $c\in\mathbb{R}$ *dan* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *mempunyai had supaya* $\lim_{x\to c}(f(x))^2=K$.

(i) Tunjukkan jika $K=0$, *maka* $had_{x\to c}f(x)=0$.

(ii) Tunjukkan dengan contoh bahawa, jika $K\neq 0$, *maka f berkemungkinan tidak mempunyai had pada c.*

7. (a) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined by setting $f(x):=x$ if x is rational, and $f(x)=0$ if x is irrational. Show that f is continuous only at 0.

(b) Suppose that $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is continuous on $\mathbb{R}$ and that $f(r)=0$ for every rational number r. Prove that $f(x)=0$ for all $x\in\mathbb{R}$.

7. *(a) Biarkan* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *dan* $f(x):=x$ *apabila x nombor nisbah dan* $f(x)=0$ *apabila x bukan nombor nisbah. Tunjukkan bahawa f hanya selanjar pada* $x=0$.

   (b) Andaikan $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *selanjar pada* $\mathbb{R}$ *dan* $f(r)=0$ *untuk setiap nombor nisbah r. Buktikan bahawa* $f(x)=0$ *untuk semua* $x\in\mathbb{R}$.

-ooo000ooo-