UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2004/2005

Oktober 2004

**MAT 282 – PENGIRAAN KEJURUTERAAN I**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA [5]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan.

1. (a) Tunjukkan bahawa persamaan.

$$e^x - 3x^2 = 0$$

mempunyai satu punca nyata dalam selang $[-1.0,\ 0.0]$.
Gunakan kaedah separuh selang untuk mendapatkan nilai hampiran punca tersebut. Jalankan tiga lelaran.

(b) Pertimbangkan masalah nilai awal

$$y' = 1 - x + y$$
$$y(0) = 1$$

(i) Gunakan kaedah Euler Terubah Suai untuk mencari $y(0.1)$ dengan $h = 0.05$. Berikan ralatnya.
(ii) Gunakan Kaedah Runge-Kutta peringkat 4 untuk mencari $y(0.1)$ dengan $h = 0.1$. Berikan ralatnya.
(iii) Nilai $y(0.1)$ yang manakah lebih jitu? Jelaskan.

[100 markah]

2. (a) Jika $x_k$ adalah punca hampiran bagi persamaan $f(x) = 0$ dan $r = x_k + e$ adalah punca sebenar, maka dengan menggunakan siri Taylor tunjukkan bahawa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$ dan $x_0$ adalah hampiran awal.
Gunakan rumus di atas untuk mencari punca hampiran bagi $x^2 + 4\sin x = 0$ benar hingga tiga tempat perpuluhan. Ambil $x_0 = -1.9$.

(b) Huraikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 14 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kepada matriks segitiga atas ***U*** dan matriks segitiga bawah ***L*** supaya ***A=LU***.
Kemudian selesaikan sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 14 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(c) Diberi

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

polinomial interpolasi Lagrange darjah $n$ dan ralatnya

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)\,!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n), \quad x_0 < \xi(x) < x_n .$$

Pertimbangkan jadual

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.32 | 0.314567 |
| 0.34 | 0.3334487 |
| 0.36 | 0.352274 |
| 0.38 | 0.370920 |

Cari nilai $f(0.337)$ dengan menggunakan $P_1, P_2$ dan $P_3$. Dapatkan ralat bagi setiap kes interpolasi jika $f(x) = \sin x$.

[100 markah]

3. (a) Selesaikan sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dengan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

dengan kaedah Gauss-Seidel. Jalankan tiga lelaran dan ambil $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

(b) Diberi

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

dengan

$$P_n(x) = f_0 + \binom{q}{1}\Delta f_0 + \binom{q}{2}\Delta^2 f_0 + ... + \binom{q}{n}\Delta^n f_0 .$$

$$\binom{q}{n} = \frac{q(q-1)...(q-k+1)}{k!}$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

dan

$$R_n(x) = \binom{q}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_n .$$

Pertimbangkan jadual

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2.0 | 336.0000 |
| 2.1 | 427.8582 |
| 2.2 | 538.7888 |
| 2.3 | 671.6184 |
| 2.4 | 829.4400 |
| 2.5 | 1015.6250 |

(i) Bentukkan jadual beza sehingga $\Delta^4 f$

(ii) Cari nilai $f(2.27)$ sehingga empat tempat perpuluhan dengan menggunakan $P_1, P_2$ dan $P_3$.

(iii) Dapatkan batas ralat bagi $P_1, P_2$ dan $P_3$ jika $f(x) = x^4 + 10x^5$.

[100 markah]

4. (a) Katakan

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Suatu sistem persamaan linear dan $\bar{x}$ suatu penyelesaian hampiran bagi sistem.

Jika ralat

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}$$

dan sisa

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}$$

tunjukkan bahawa

(i) $\|\boldsymbol{e}\| \le \|A^{-1}\| \|\boldsymbol{r}\|$

(ii) $\dfrac{\|r\|}{\|A\|} \le \|e\| \le \|A^{-1}\| \|r\|$

(iii) $\dfrac{\|b\|}{\|A\|} \le \|x\| \le \|A^{-1}\| \|b\|$

(b) Diberi

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 f_0 + \ldots\right].$$

dan

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 + (q-1)\Delta^3 f_0 + \frac{6q^2-18q+1}{12}\Delta^4 f_0 + \ldots\right]$$

Apabila $q = 0$ menjadi

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\Delta^n f_0\right]$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 + \ldots\right]$$

dan

$$R_n(x) = \binom{q}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_n .$$

Pertimbangkan jadual

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1.0 | 2.71828 |
| 1.1 | 3.00417 |
| 1.2 | 3.32012 |
| 1.3 | 3.66930 |
| 1.4 | 4.05520 |
| 1.5 | 4.48169 |
| 1.6 | 4.95303 |

(i) Bina jadual beza sehingga $\Delta^4 f$

(ii) Dapatkan nilai $f'(1.0), f'(1.22)$ dan $f'(1.4)$ dengan menggunakan dua sebutan.

(iii) Tunjukkan

$$R'_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} h^n f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 \le \xi \le x_n$$

apabila $q = 0$

(iv) Dapatkan ralat bagi $f'(1.0)$ dan $f'(1.4)$

(v) Nilaikan $f''(1.22)$ dengan menggunakan dua sebutan.

[100 markah]

- 000 O 000 -