UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MAT 263 – TEORI KEBARANGKALIAN

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA [5]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan.

1. (a) Nyatakan samada kenyataan berikut adalah BENAR atau SALAH. Bagi setiap satu, berikan sebabnya.

   (i) Fungsi taburan bagi suatu pemboleh ubah rawak adalah selanjar pada setiap titik.
   (ii) $P(X = a)$ adalah sifar bagi setiap titik a bagi taburan selanjar.
   (iii) Pemboleh ubah rawak diskrit hanya mempunyai bilangan terhingga nilai-nilai yang mungkin.
   (iv) $\left\{F(x) = e^{-x}; \quad x \geq 0\right\}$ adalah suatu fungsi taburan.
   (v) $\left\{F(x) = x^2; \quad x \geq 0\right\}$ adalah suatu fungsi taburan.

[20 markah]

(b) Ahli lembaga sebuah syarikat minyak berbincang untuk membuat keputusan sama ada syarikat mereka patut menggali sebuah kawasan yang baru dijumpai. Mereka percaya bahawa peluang tempat tersebut mengandungi minyak ialah 50%. Bagi tujuan tersebut, mereka mengupah sebuah agensi geologi untuk menjalankan kajian yang patut. Berdasarkan kajian ini, agensi ini akan mengesyurkan sama ada kawasan tersebut patut digali atau tidak. Rekod lalu menunjukkan agensi ini mengesyurkan penggalian ke atas 90% daripada kawasan yang didapati terdapat minyak dan mengesyurkan supaya penggalian tidak dijalankan keatas 80% daripada kawasan-kawasan yang didapati tiada minyak.

   (i) Adakah munasabah bagi ahli lembaga syarikat ini percaya bahawa peluang suatu kawasan mengandungi minyak ialah 50%? Huraikan.
   (ii) Andaikan agensi geologi mengesyurkan penggalian dilakukan di kawasan yang dijumpai itu. Apakah kebarangkalian bahawa terdapat minyak di kawasan tersebut?
   (iii) Apakah kebarangkalian bahawa agensi itu tidak mengesyurkan penggalian tetapi kawasan tersebut sebenarnya mengandungi minyak?
   (iv) Apakah kebarangkalian bahawa agensi itu mengesyurkan penggalian tetapi kawasan tersebut tidak terdapat minyak?

[45 markah]

(c) Fungsi jisim kebarangkalian bagi suatu pemboleh ubah rawak diskrit X ditakrifkan oleh

$$p_X(x) = \frac{1}{2} p_X(x-1) \quad ; x = 1, 2, \cdots$$

   (i) Tentukan kebarangkalian bahawa X adalah kurang dari 10.
   (ii) Apakah kebarangkalian bahawa X adalah kurang daripada integer n?

$$\left(\text{Diberi} : \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \quad ; \quad |r| < 1 \right)$$

[20 markah]

(d) Secara induksi, tunjukkan

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Di bawah keadaan apakah ketaksamaan ini berguna?

[15 markah]

2. (a) Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi suatu pemboleh ubah rawak X diberi oleh

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & ; \quad x \ge 1 \\ 0 & ; \text{ di tempat lain.} \end{cases}$$

(i) Dapatkan fungsi taburan bagi X.

(ii) Kirakan nilai jangkaan bagi $\left(\dfrac{X^2+1}{X}\right)$.

(iii) Tentukan kebarangkalian bahawa $X > 4$.

[30 markah]

(b) Diberi fungsi penjana momen bagi suatu pemboleh ubah rawak X seperti berikut:

$$M_X(t) = 0.25e^t + 0.35e^{3t} + 0.40e^{5t}.$$

Kira $P(X > 3)$.

[10 markah]

(c) Fungsi penjana momen $M_X(t)$ bagi pemboleh ubah rawak diskrit X ialah

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{4-3e^t}\right)^3.$$

(i) Apakah nama taburan pemboleh ubah rawak ini dan nyatakan fungsi ketumpatan kebarangkaliannya.

(ii) Dapatkan min dan variansnya.

(iii) Hitungkan $P(X > 1)$ dan $P(X = 2)$.

[30 markah]

(d) Katakan

$$f(x_1 \mid x_2) = \begin{cases} c_1\, x_1 / x_2^2 & ; \quad 0 < x_1 < x_2 \\ & \quad\;\; 0 < x_2 < 1 \\ 0 & ; \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

$$\text{dan} \quad f_2(x_2) = \begin{cases} c_2 x_2^4 & ; \quad 0 < x_2 < 1 \\ 0 & ; \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

(i) Dapatkan pemalar c_1 dan c_2.

(ii) Cari fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi X_1 dan X_2.

(iii) Kira $P\left(\frac{1}{4} < X_1 < \frac{1}{2} \,\middle|\, X_2 = \frac{5}{8}\right)$ dan $P\left(\frac{1}{4} < X_1 < \frac{1}{2}\right)$.

[30 markah]

3.(a) Katakan suatu sampel rawak bersaiz $n = 14$ diambil dari suatu taburan seragam $U(0,1)$. Gunakan Teorem Had Memusat untuk mengira $P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \le 0.1\right)$.

[15 markah]

(b) Seorang doktor mengambil 25 ukuran suatu graviti badan secara tak bersandar. Diketahui bahawa alatannya hanya mampu mengukur supaya sisihan piawai setiap ukuran adalah σ unit.

(i) Dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev, dapatkan batas bawah kebarangkalian bahawa purata ukurannya akan berbeza dari graviti sebenar adalah kurang dari $\frac{\sigma}{4}$ unit.

(ii) Dengan menggunakan Teorem Had Memusat, dapat nilai hampiran bagi kebarangkalian di (i). Huraikan.

[30 markah]

(c) Pemboleh ubah rawak X_1 dan X_2 adalah tak bersandar dan tertabur secaman dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f_X(x) = e^{-x} \quad ; \quad x > 0.$$

Dapatkan fungsi taburan bagi pemboleh ubah rawak Y jika $Y = X_1 + X_2$.

[20 markah]

(d) Katakan $\bar{X}$ dan S^2 adalah min dan varians suatu sampel rawak bersaiz 25 dari suatu taburan $N(3,100)$.

(i) Kirakan $P\left(0 < \bar{X} < 6\right)$.

(ii) Hitungkan $P\left(55.2 < S^2 < 145.6\right)$.

(iii) Dapatkan nilai C jika $P\left(\left|\frac{5(\bar{X}-\mu)}{S}\right| \le C\right) = 0.90$.

(iv) Apakah nilai C jika $P\left(S > C\right) = 0.90$?

[35 markah]

4. (a) Katakan X_1, X_2, X_3 adalah suatu sampel rawak bersaiz 3 dari suatu taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \frac{x}{6} \quad ; \quad x = 1,2,3.$$

(i) Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi $\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$.

(ii) Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi $\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{2}$.

[35 markah]

(b) Andaikan $(X_1 + X_2 + X_3)$ adalah suatu sampel rawak bersaiz 3 dari taburan $N(0,1)$.

(i) Tunjukkan bahawa $Y_1 = X_1 + \delta X_3$, $Y_2 = X_2 + \delta X_3$ mempunyai taburan normal bivariat.

(iii) Apakah syarat yang diperlukan supaya Y_1 dan Y_2 adalah tak bersandar?

[35 markah]

(c) Andaikan X_1, X_2 adalah dua pemboleh ubah khi kuasa dua yang saling tak bersandar dengan darjah kebebasan r_1 dan r_2, masing-masing.

Buktikan bahawa $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$ dan $Y_2 = X_1 + X_2$ adalah tak bersandar.

$$\left(\text{Diberi}: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r/2)} 2^{r/2} x^{r/2-1} e^{-x/2} & ; \ 0 < x < \infty \\ 0 & ; \text{ di tempat lain} \end{cases} \right)$$

[30 markah]

- ooo O ooo -