

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

**Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2003/2004**

September / Oktober 2003

MAT 222-PERSAMAAN PEMBEZAAN II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA [3]** soalan di dalam **EMPAT [4]** halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Cari $\exp(tA)$ bagi matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

dan selesaikan persamaan

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

[40 markah]

- (b) Dapatkan persamaan lengkung kamiran dan lakarkan plot fasa untuk sistem persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - xy \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

[40 markah]

- (c) Untuk sistem persamaan di bahagian (b) cari syarat pada nilai awal $x_0 = x(0)$, dan $y_0 = y(0)$, supaya penyelesaian $x(t)$, $y(t)$ adalah berkala.

[20 markah]

2. (a) Tunjukkan bahawa penyelesaian bagi masalah :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

boleh ditulis dalam bentuk

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

di mana $c > 0$ adalah pemalar.

[30 markah]

(b) Selesaikan :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + 2, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u_t(x, 0) = \cos x, \quad -\infty < x < \infty$$

di mana $c > 0$ adalah pemalar.

[30 markah]

(c) Pertimbangkan masalah nilai eigen berikut :

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \ell$$

$$y'(0) = 0$$

$$y'(\ell) + y(\ell) = 0$$

di mana $\ell > 0$ adalah pemalar.

- (i) Dapatkan persamaan yang puncanya adalah nilai eigen.
- (ii) Dengan menggunakan graf, tunjukkan bahawa bilangan nilai eigen adalah tak terhingga banyaknya.
- (iii) Tunjukkan fungsi-fungsi eigen bagi nilai-nilai eigen yang berlainan adalah ortogon pada $[0, \ell]$.

[40 markah]

3. (a) Selesaikan :

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u_x(2, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Cari $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

[60 markah]

(b) Selesaikan :

$$u_t = u_{xx} - u \quad , \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(\ell, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

di mana $\ell > 0$ adalah pemalar dan $f(x)$ adalah suatu fungsi.

[40 markah]