UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2003/2004

April 2004

MAT 222 – Persamaan Pembezaan II

Masa : 3 jam

ARAHAN KEPADA CALON

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA [3]** soalan di dalam **EMPAT [4]** halaman muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Ditakrifkan $e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$ untuk sebarang matriks $n \times n$ A. Cari e^{tA} jika diberi $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

[30 markah]

(b) Diberikan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

(i) Tunjukkan bahawa B dan C kedua-duanya merupakan matriks tak singular.

[30 markah]

(ii) Tentusahkan bahawa $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ masing-masing merupakan penyelesaian unik kepada persamaan-persamaan

$$B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

[20 markah]

(c) Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4e^{-t} + 4\sin t + \cos t \\ -\sin t - 4\cos t \end{bmatrix}.$$

(i) Deduksikan suatu penyelesaian pelengkap kepada persamaan ini.

[10 markah]

(ii) Cari penyelesaian am bagi persamaan ini dengan menggunakan kaedah pekali tak tentu untuk memperoleh suatu penyelesaian khusus baginya dahulu.

[10 markah]

2. Pertimbangkan persamaan pembezaan separa

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0.$$

(a) Katakan $A,\ B^2 - 4A \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(i) Tunjukkan bahawa transposisi $r = ax + y, s = bx + y$ akan menurunkan persamaan pembezaan di atas kepada bentuk berkanun $u_{rs} = 0$ sekiranya a dan b merupakan kedua-dua punca bagi persamaan kuadratrik $Az^2 + Bz + C = 0$.

[30 markah]

(ii) Dapatkan penyelesaian am persamaan pembezaan yang diberi.

[20 markah]

(b) Diberikan $A = 0$, tunjukkan bahawa persamaan pembezaan yang diberi dapat diselesaikan secara separuh sebagai $Bu_x + Cu_y = F(x)$ di mana F suatu fungsi sebarangan. Seterusnya gunakan transposisi $r = ax + y, s = x$ untuk menurunkan persamaan di atas kepada bentuk berkanun $\mathrm{u_s = G(s)}$, di mana G suatu fungsi sebarangan, bila $B, C \in \mathbb{R} - \{0\}$.

[20 markah]

(c) Senaraikan penyelesaian am bagi persamaan pembezaan yang diberi dengan mempertimbangkan setiap kes yang mungkin.

[30 markah]

3. Pertimbangkan persamaan keupayaan

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 1$$

dalam sukuan $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, dengan $u = u(r,\theta)$.

(i) Dengan menganggap bahawa $u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$, tunjukkan bahawa persamaan di atas boleh dipisahkan menjadi dua persamaan:

$$T'' + \lambda T = 0 \qquad \text{(A)}$$

dan

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \qquad \text{(B)}$$

λ merupakan suatu pemalar.

[20 markah]

(ii) Diberi syarat sempadan $u(r,0) = u(r,\pi/2) = 0$, bincangkan mengapa penyelesaian tak remeh didapati hanya jika $T(0) = T(\pi/2) = 0$.

[10 markah]

(iii) Tunjukkan, dengan menggunakan persamaan (A), penyelesaian adalah remeh jika $\lambda \leq 0$.

[10 markah]

(iv) Tunjukkan bahawa persamaan (A) hanya mempunyai penyelesaian-penyelesaian tak remeh

$$T_n(\theta) = a_n \sin 2n\theta \text{ dengan } n \in \mathbf{Z} - \{0\},$$

a_n adalah pemalar sebarangan yang tak sifar.

[20 markah]

(v) Cari kedua-dua nilai α yang mungkin supaya $R(r) = r^{\alpha}$ merupakan suatu penyelesaian bagi (B)

[10 markah]

(vi) Cari $\lim\limits_{r \to 0^+, n \to \infty} R(r)$ bagi setiap nilai α yang diperoleh dalam (v). Seterusnya deduksikan bahawa $\alpha \geq 0$.

[10 markah]

(vii) Gunakan prinsip superposisi untuk memperoleh suatu penyelesaian am kepada masalah nilai sempadan ini.

[10 markah]

(viii) Diberi syarat sempadan tambahan $u(1,\theta) = \pi/4$, dapatkan suatu penyelesaian khusus kepada masalah ini.

[10 markah]

- 000 O 000 -