

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang  
Sidang Akademik 2004/2005

Mei 2005

**MAT 202 – PENGANTAR ANALISIS**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua TIGA [3]** soalan.

...2/-

1. (a) Takrifkan Supremum bagi suatu subset  $S$  yang tak kosong pada  $\mathbb{R}$ .  
[5 markah]
- (b) Biarkan  $x$  satu nombor nyata dan set  $A = \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$ . Tunjukkan  $\sup A = x$ . ( $\mathbb{Q}$  = nombor nisbah).  
[25 markah]
- (c) Diberikan set  $S = \{x^2 - 2x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ .  
Dapatkan supremum dan infimum set  $S$  ini jika wujud.  
[15 markah]
- (d) Nyatakan prinsip Archimedes. Seterusnya buktikan prinsip ini.  
[20 markah]
- (e) Untuk sebarang nombor perdana  $p$ , tunjukkan bahawa  $\sqrt{p}$  adalah nombor bukan nisbah.  
[15 markah]
- (f) Takrifkan keterbilangan set. Seterusnya, andaikan  $B$  sebagai set semua bulatan yang berpusat pada titik  $(i, 0)$  dengan jejari  $q \in \mathbb{Q}^+$  dan  $i \in \mathbb{Z}^+$ . Tentukan sama ada set  $B$  terbilang.  
[20 markah]
2. (a) Diberikan  $\{a_n\} = \left\{ \frac{\cos n + \sin n}{n^2 + n - 60} \right\}$ .
- (i) Adakah jujukan ini menumpu?  
(ii) Jika ya, tunjukkan jawapan anda menggunakan takrifan penumpuan jujukan. Jika tidak, jelaskan bagaimana ianya bercanggahan dengan takrifan penumpuan jujukan tersebut.  
(iii) Seterusnya jika  $\{a_n\}$  menumpu, apakah nilai integer terkecil  $N$  untuk  $\varepsilon = 0.01$ .  
[20 markah]
- (b) Takrifkan jujukan cauchy. Seterusnya tunjukkan bahawa jujukan  $\{(-1)^n\}$  bukan satu jujukan cauchy.  
[15 markah]
- (c) Buktikan bahawa sesuatu jujukan nombor nyata itu adalah cauchy jika dan hanya jika jujukan tersebut menumpu.  
[35 markah]

- (d) Untuk setiap  $n \in \mathbb{Z}^+$  andaikan  $I_n = [a_n, b_n]$  merupakan selang tertutup pada  $\mathbb{R}$  yang bersifat  $I_n \supset I_{n+1}$ . Tunjukkan bahawa  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ .

[30 markah]

3. (a) Diberikan  $A = [-15, 0] \cup (6, 9) \cap \mathcal{Q}$

- (i) Cari titik pedalamannya
- (ii) Cari titik hadnya
- (iii) Cari titik terpercilnya
- (iv) Tentukan sama ada  $A$  tertutup atau terbuka
- (v) Tentukan sama ada  $A$  padat
- (vi) Tentukan sama ada  $A$  terkait

[20 markah]

- (b) Andaikan  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (i) Jika  $a \in A$  titik terpercil set  $A$ , adakah  $f$  selanjara pada titik  $a$  ini? Jika ya, buktikan ianya benar. Jika tidak, sangkal menggunakan contoh.
- (ii) Jika  $f$  terbezakan pada suatu titik  $b$  adakah  $f$  selanjara pada  $b$ ? Jika ya, buktikan ianya benar dan jika tidak sangkal menggunakan contoh.
- (iii) Jika  $f$  selanjara dan  $A$  terkait, adakah  $f(A)$  juga terkait? Jika ya, buktikan ianya benar dan jika tidak, sangkal dengan contoh.

[25 markah]

- (c) Diberi  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

- (i) Tunjukkan bahawa  $f$  adalah selanjara secara seragam pada  $[a, \infty)$  untuk sebarang  $a > 0$  dan  $a$  tetap.
- (ii) Tunjukkan bahawa  $f$  adalah tidak selanjara secara seragam pada  $(0, \infty)$ .

[15 markah]

- (d) Biarkan  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $x \in [-2, 1]$ ,  $P = \{-2, -1, 0, 1\}$ .

- (i) Cari hasil tambah atas  $f, A(P; f)$  terhadap petak  $P$ .
- (ii) Cari hasil tambah bawah  $f, B(P; f)$  terhadap petak  $P$ .
- (iii) Berdasarkan petak  $P$  seperti di atas berikan satu contoh penghalusan kepada petak  $P$  ini.

(iv) Apakah kesan penghalusan ini terhadap nilai  $A(P; f)$  dan  $B(P; f)$ .

[20 markah]

(e) Diberikan  $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1; & 1 < x \leq 2 \\ 0; & x = 1 \end{cases}$ .

Cari  $\int_0^2 f dx$  dengan menggunakan takrifan.

[20 markah]

-ooo000ooo-