**UNIVERSITI SAINS MALAYSIA**

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

**MAT 202 – PENGANTAR ANALISIS**

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA [3]** soalan di dalam **EMPAT [4]** halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Takrifkan Supremum dan Infimum bagi satu set $S \in \Re$ ( set semua nombor nyata) yang tak kosong. Seterusnya nyatakan aksiom kelengkapan bagi $\Re$.
[7 markah]

   (i) Dengan menggunakkan aksiom kelengkapan ini buktikan bahawa setiap subset tak kosong pada $\Re$ yang dibatasi dari bawah mempunyai Infimum. [15 markah]

   (ii) Dapatkan Supremum dan Infimum jika wujud bagi setiap set berikut:-

   a) $S = \{x \in \Re : 2x^2 + 8x + 6 < 0\}$. [5 markah]

   b) $S = \{\frac{1}{n} : n \in N,\ N \text{ nombor asli}\}$.
   [5 markah]

   (ii) Berlandaskan aksiom kelengkapan bagi $\Re$, adakah set semua nombor nisbah memenuhi aksiom kelengkapan?. Jelaskan jawapan anda dengan contoh. [8 markah]

(b) Untuk setiap nombor , tunjukkan yang berikut adalah benar:

   (i) $x-1 < [x] \leq x$ , dengan $[x]$ integer terbesar $\leq x$; dan
   [12 markah]

   (ii) $[x]$ adalah satu integer yang unik.
   [8 markah]

(c) Andaikan $S$ dan $T$ sebagai subset tak kosong pada $\Re$, dengan $T$ terbatas dan $S \subset T$, maka tunjukkan yang berikut:-

   (i) Sup $S \leq$ Sup $T$ dan Inf $T \leq$ Inf $S$ [10 markah]

   (ii) Berikan satu contoh yang menunjukkan Sup $S$ = Sup $T$ dan Inf $S$ = Inf $T$ meskipun $S$ subset wajar bagi $T$.
   [8 markah]

(d) Tunjukkan bahawa set $S = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ iaitu set semua nombor integer ganjil adalah terbilangkan. [7 markah]

(e) Buktikan bahawa setiap set tak terhingga mempunyai suatu subset yang tak terhingga secara terbilangkan.
[15 markah]

2. (a) Diberikan $f$, $g$ dan $h : \Re \to \Re$ dengan $f(x) = 2x + 1$ ; $g(x) = x^2 + 1$ dan

$$h(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq \frac{1}{2}, \\ x - 1, & x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(i) Dapatkan $f([0, 1])$, $g((0, 1])$ dan $h((0, 1))$; [7 markah]

(ii) Dapatkan praimej $f^{-1}([0, 1])$. $g^{-1}((0, 1])$ dan $h^{-1}((0, 1))$. [7 markah]

(b) Takrifkan penumpuan had suatu jujukan. [5 markah]

(i) Dengan menggunakan takrifan ini tentusahkan penumpuan jujukan berikut:

a) $\underset{n \to \infty}{had} \dfrac{1}{n^p} = 0$ untuk $p > 0$; [7 markah]

b) $\underset{n \to \infty}{had} \dfrac{1 - 2n^2}{4n + 3n^2} = -\dfrac{2}{3}$ . [7 markah]

(ii) Dengan menggunakan takrifan penumpuan jujukan ini, tunjukkan bahawa had suatu jujukan jika wujud adalah unik. [15 markah]

(c) Biarkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ jujukan-jujukan cauchy. Tunjukkan bahawa $\{a_n + b_n\}$ juga jujukan cauchy. [12 markah]

(d) Andaikan $A$ suatu set nombor nyata. Jika $x$ adalah titik had $A$, tunjukkan bahawa setiap jiranan - $\varepsilon$ pada $x$ mengandungi tak terhingga banyaknya unsur $A$.

[15 markah]

(e) Untuk setiap set yang berikut, dapatkan titik pedalaman, titik had dan titik terpencilnya:-

(i) $[-19, 5) \cup \{7, 8, 9, 10\}$ [5 markah]

(ii) $(0, 1) \cap Q$, dengan $Q$ adalah set semua nombor nisbah. [5 markah]

(f) Tunjukkan bahawa setiap set nombor nyata yang padat adalah terbatas dan juga tertutup. Seterusnya berikan contoh satu set yang padat. [15 markah]

3. (a) Andaikan fungsi $f: A \to \Re$ selanjar. Jika $A$ adalah set padat maka tunjukkan bahawa $f(A)$ juga adalah padat.

[15 markah]

(i) Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ , $x > 0$ dengan set $A$ adalah selang $[\frac{1}{4}, 1]$. Adakah $f$ mempunyai nilai ekstremum?, jika ya, apakah nilainya. [7 markah]

(ii) Jika titik-titik hujung selang $[\frac{1}{4}, 1]$ disingkirkan, adakah $f$ masih mempunyai nilai ekstremum?. Berikan alasan anda. [5 markah]

(b) Andaikan fungsi $f: A \to \Re$. Jika $f$ selanjar dan $A$ adalah padat, maka tunjukkan $f$ selanjar secara seragam pada $A$. Seterusnya untuk fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$, tunjukkan bahawa $f$ adalah selanjar secara seragam pada sebarang selang tertutup $[c, d]$ dengan $0 < c < d$, dan $f$ tidak selanjar secara seragam pada $(0, \infty)$.

[20 markah]

(c) Andaikan fungsi $f: A \to \Re$ dan $a$ adalah titik pedalaman A. Jika $f'(a) > 0$, maka tunjukkan bahawa wujud $\delta > 0$ supaya untuk $x \in A$ dan $a < x < a + \delta$, diperolehi $f(a) < f(x)$. [15 markah]

(d) Diberikan $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Letakkan petak $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\}$ , $n \in N$.

(i) Dapatkan hasil tambah atas dan hasil tambah bawah bagi fungsi $f$ untuk $n = 4$.

[8 markah]

(ii) Seterusnya, tunjukkan dengan menggunakan takrifan kamiran bahawa

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} .$$

[15 markah]

(e) Andaikan $f: [a, b] \to \Re$ ialah satu fungsi yang terbatas pada selang $[a, b]$. Jika $f$ terkamirkan pada $[a, b]$, tunjukkan bahawa untuk setiap $\varepsilon > 0$ wujud suatu petak $P_\varepsilon$ pada $[a, b]$ supaya $A(P_\varepsilon; f) - B(P_\varepsilon; f) < \varepsilon$. [ $A(P_\varepsilon; f)$ adalah hasil tambah atas $f$ terhadap $P_\varepsilon$ dan $B(P_\varepsilon; f)$ adalah hasil tambah bawah $f$ terhadap $P_\varepsilon$].

[15 markah]

-ooo000ooo-