

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MAT 202 – PENGANTAR ANALISIS

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA [5]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua TIGA** soalan.

...2/-

1. (a) (i) Buktikan bahawa diantara sebarang dua nombor nyata yang berbeza terdapat suatu nombor tak nisbah.
- (ii) Jika $u > 0$ dan $x < y$, tunjukkan wujud suatu nombor tak nisbah a supaya $x < au < y$.

(25 markah)

(b) Diberikan set $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

- (i) Untuk sebarang nombor nyata x , tunjukkan supremum S adalah suatu nombor integer.
- (ii) Lambangkan integer tersebut sebagai y . tunjukkan integer y tersebut memenuhi ketaksamaan $x - 1 < y \leq x$.
- (iii) Seterusnya tunjukkan bahawa integer y tersebut adalah unik.

(25 markah)

(c) Andaikan S suatu subset tak kosong pada \mathbb{R} dan S dibatasi dari atas. Takrifkan

$$T = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ batas atas } S\}. \text{ Tunjukkan } \sup S = \inf T$$

(15 markah)

(d) Andaikan $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

- (i) Cari supremum dan infimum S jika wujud.
- (ii) Untuk titik infimum (jika wujud) yang anda dapati, berikan penjelasan anda menggunakan prinsip Archimedes.

(15 markah)

(e) Suatu set A dikatakan terbilang jika $A \sim \mathbb{Z}^+$ atau A terhingga. Berasaskan kenyataan ini, tunjukkan bahawa set tak kosong A adalah terbilang jika A dapat diungkapkan sebagai suatu jujukan terhingga atau tak terhingga.

(20 markah)

2. (a) Diberikan $\{a_n\} = \left\{ \frac{(1+4n)^2}{1-3n-6n^2} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

- (i) Adakah jujukan ini menumpu?

- (ii) Jika Ya!, tunjukkan jawapan anda menggunakan takrifan penumpuan jujukan, dan jika Tidak!, jelaskan bagaimana ianya bercanggahan dengan takrifan penumpuan jujukan tersebut. Seterusnya, jika $\{a_n\}$ menumpu, apakah nilai integer terkecil N untuk $\varepsilon = 0.01$.

(15 markah)

- (b) Tunjukkan bahawa jika sesuatu jujukan itu menumpu, maka jujukan tersebut adalah jujukan Cauchy.

- (i) Adakah akas pernyataan diatas benar? Jika Ya! Sila buktikan. Jika Tidak, sangkal dengan contoh.

- (ii) Diberikan $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}x_{n-2}, n \geq 3$ dengan $x_1 < x_2$ kita perolehi $|x_m - x_n| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 3(x_1 - x_2)$. Tunjukkan bahawa jujukan $\{x_n\}$ menumpu.

(30 markah)

- (c) Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, andaikan $I_n = [a_n, b_n]$ selang tertutup pada \mathbb{R} bersifat

$$I_n \supset I_{n+1}. \text{ Dengan } A = \{a_m : m \in \mathbb{Z}^+\}, \text{ tunjukkan bahawa supremum } A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

(20 markah)

- (d) Diberikan set $A = (0, 1) - \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$.

- (i) Cari titik pedalamannya.
 (ii) Cari titik hadnya.
 (iii) Cari titik terencilnya.
 (iv) Tentukan sama ada A tertutup atau terbuka.

(15 markah)

- (e) (i) Jika set K_1 dan K_2 padat maka buktikan bahawa $K_1 \cup K_2$ juga padat.

- (ii) Berikan satu contoh himpunan set padat $\{K_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ yang kesatuannya,

iaitu $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ tidak padat. Apakah syarat penting untuk kesatuan sesuatu

himpunan set padat tersebut dapat mengekalkan kepadatannya.

(20 markah)

...4/-

3. (a) Andaikan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Jika a titik terpencil set A , tunjukkan bahawa f adalah selanjar pada a .
- (ii) Seterusnya bincangkan keselajaran fungsi f pada set $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup [2, 3]$ apabila $f(x) = x$.
- (iii) Jika f suatu fungsi yang selanjar dan A terkait, maka tunjukkan bahawa $f(A)$ juga terkait.

(25 markah)

- (b) (i) Fungsi f tak selanjar secara seragam pada A jika dan hanya jika wujud $\varepsilon > 0$ dan jujukan-jujukan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ pada A dengan $a_n - b_n \rightarrow 0$ apabila $n \rightarrow \infty$, tetapi $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$.
Berdasarkan pernyataan ini tunjukkan bahawa fungsi nyata $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah tak selanjar secara seragam pada $(0, \infty)$.
- (ii) Dengan menggunakan takrif, tunjukkan fungsi f di dalam (i) selanjar secara seragam pada sebarang selang tertutup $[c, d]$ dengan $0 < c < d$.

(15 markah)

(c) Andaikan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Jika f terbezakan pada nombor a , tunjukkan bahawa f adalah selanjar pada a .
- (ii) Adakah akas pernyataan (i) benar? Jika benar, buktikannya dan jika tidak sangkalkannya dengan contoh.
- (iii) Andaikan $A = [a, b]$. Jika f selanjar pada A dan terbezakan pada $A - \{a, b\}$, maka tunjukkan eksremum berlaku pada a atau b , ataupun pada nombor $c \in A - \{a, b\}$ dengan $f'(c) = 0$.

(20 markah)

(d) Dengan menggunakan takrifan kamiran Riemann, tunjukkan

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a), c \in \mathbb{R}.$$

(15 markah)

...5/-

(e) Andaikan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan f terbatas.

- (i) Jika $A(P_\varepsilon; f) - B(P_\varepsilon; f) < \varepsilon$ maka tunjukkan f terkamirkan pada $[a, b]$ (P_ε adalah petak pada $[a, b]$).
- (ii) Jika f menokok pada $[a, b]$, tunjukkan dengan menggunakan pernyataan (i) bahawa f terkamirkan pada $[a, b]$.

(25 markah)

-ooo000ooo-