UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2003/2004

April 2004

MAT 202 – Pengantar Analisis

Masa : 3 jam

ARAHAN KEPADA CALON

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA [3]** soalan di dalam **LIMA [5]** halaman muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Takrifkan nombor nisbah.

[3 markah]

(i) Katakan x dan y dua nombor nyata dengan $x < y$. Tunjukkan bahawa wujud suatu nombor nisbah q dengan $x < q < y$.

[10 markah]

(ii) Seterusnya, buktikan juga bahawa untuk x, y nombor nyata dengan $x < y$, maka wujud suatu nombor bukan nisbah r supaya $x < r < y$.

[7 markah]

(b) Jika $A, B \subset \Re$ dan $B \subset A$, tunjukkan bahawa $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$. Anggaplah kesemua infimum dan supremum untuk set A dan B wujud.

[20 markah]

(c) Biarkan α batas atas set A. Tunjukkan bahawa $\alpha = \sup A$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, wujud suatu unsur $x \in A$ supaya $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.

[20 markah]

(d) Biarkan A suatu set tak kosong yang terbatas dan takrifkan $B = \{ x + k : x \in A \}$, dengan k satu nombor nyata yang tetap. Tunjukkan bahawa $\sup B = \sup A + k$ dan $\inf B = \inf A + k$.

[20 markah]

(e) (i) Takrifkan keterbilangan sesuatu set. Seterusnya tunjukkan bahawa set semua nombor nisbah adalah terbilangkan.

[10 markah]

(ii) Tunjukkan bahawa subset kepada suatu set yang terbilangkan adalah terbilang.

[10 markah]

2. (a) Dengan menggunakan takrifan penumpuan had jujukan, tunjukkan yang berikut:-

$$\underset{n\to\infty}{had} \frac{\cos n + 3\sin n}{n^2 + n - 60} = 0 .$$

[7 markah]

(b) (i) Nyatakan Teorem Tersepit bagi jujukan.Seterusnya buktikan Teorem Tersepit ini.

[15 markah]

(ii) Dengan menggunakan Teorem Tersepit ini dapatkan had bagi jujukan $\dfrac{\sin n + \cos n}{n}$.

[7 markah]

(c) Jika jujukan $\{x_n\}$ menumpu ke satu nombor a, tunjukkan bahawa setiap subjujukannya juga menumpu ke nombor a.

[15 markah]

(d) Andaikan A sebagai suatu set indeks, dan untuk setiap $a \in A$, set G_a adalah terbuka. Tunjukkan bahawa $\bigcup_{a\in A} G_a$ adalah terbuka. Seterusnya jika setiap G_k terbuka untuk $k = 1,2,\ldots,n$, tunjukkan juga $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ adalah terbuka.

[20 markah]

(e) Takrifkan tudung terbuka bagi suatu set $A \subset \Re$.

[5 markah]

(i) Dapatkan satu tudung terbuka bagi set nombor asli, **N**.

[8 markah]

(ii) Takrifkan kepadatan suatu set $A \subset \Re$. Seterusnya untuk set $A = (0,1)$ dapatkan suatu tudung terbukanya. Berlandaskan konsep tudung, adakah set A suatu set yang padat, jelaskan jawapan anda.

[10 markah]

(f) Takrifkan ketakterkaitkan bagi suatu set $A \subset \Re$. Seterusnya,

diberikan $A = [-10,2] \cup [4,10)$. Dengan menggunakan takrifan ini, tentukan sama ada A terkait atau sebaliknya.

[13 markah]

3. (a) Andaikan $f: A \to \Re$. Jika A padat dan f selanjar, maka tunjukkan bahawa f mempunyai nilai ekstremum.

[15 markah]

(i) Diberi $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$ dan A adalah selang [1, 2]. Adakah f mempunyai nilai ekstremum? Jika Ya. Apakah nilainya.

[8 markah]

(ii) Jika titik-titik hujung selang [1, 2] disingkirkan, adakah f masih mempunyai nilai ekstremum? Berikan alasan anda.

[7 markah]

(b) Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{(x-1)}{(x+2)}$. Tunjukkan fungsi ini adalah satu fungsi yang selanjar secara seragam di atas selang $[0, \infty)$.

[15 markah]

(c) Diberikan $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$. Letakkan petak $P = \left\{0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi\right\}$.

(i) Dapatkan hasil tambah atas dan hasil tambah bawah fungsi f terhadap P.

[15 markah]

(ii) Untuk petak P diatas, dapatkan petak P_1 dengan $P \subset P_1$ dan $P \neq P_1$. Seterusnya cari hasil tambah atas dan hasil tambah bawah fungsi f terhadap P_1. Apakah kesimpulan yang anda dapati di atas perubahan petak ini.

[15 markah]

(d) Andaikan $f: [a,b] \to \Re$ fungsi berbatas dan $\mathrm{P}([a,b])$ ialah set semua petak pada $[a,b]$.

(i) Takrifkan kamiran bawah f, iaitu $B(f)$ pada $[a, b]$ dan kamiran atas f, iaitu $A(f)$ pada $[a, b]$.

[10 markah]

(ii) Seterusnya, jika P_1, P_2 sebarang dua petak pada selang $[a, b]$, maka $B\,(P_1; f) \leq A\,(P_2; f)$. Dengan itu tunjukkan $B\,(f) \leq A\,(f)$.

[15 markah]

- ooo O ooo -