

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MAT 122 – PERSAMAAN PEMBEZAAN I

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **DUABELAS [12]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua dua puluh lima** soalan **BAHAGIAN I** dalam borang OMR yang disediakan . Jawab **semua dua** soalan **BAHAGIAN II** dalam buku jawapan. **Borang OMR dan soalan Bahagian 1 akan dipungut selepas 2 jam masa peperiksaan yang pertama berlalu.** Sila pisahkan soalan BAHAGIAN I daripada soalan BAHAGIAN II.

...2/-

BAHAGIAN I: Jawab SEMUA 25 soalan. Setiap jawapan yang betul diberi 2 markah [50/100].

1. Pilih pernyataan yang **tidak benar** bagi persamaan pembezaan berikut:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \frac{dv}{dx} + x \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + v = 0$$

- A. satu persamaan pembezaan biasa
- B. v merupakan pembolehubah bersandar
- C. x merupakan pembolehubah tak bersandar
- D. satu persamaan pembezaan berdarjah 2
- E. satu persamaan pembezaan berperingkat 2

2. Pilih persamaan pembezaan **tak linear** daripada yang berikut:

A. $4 \frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x) \frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0$

B. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

C. $\frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)y = x^2$

D. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + x^3 \frac{dy}{dx} = 5x$

E. $e^x \frac{d^2x}{dy^2} + 2 \frac{dx}{dy} = 1$

3. Diberikan masalah nilai awal

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Pilih pernyataan yang **tidak benar**

- A. $y_1(x) = x^2$ ialah suatu penyelesaian
- B. $y_2(x) = x^3$ ialah suatu penyelesaian

- C. kedua – dua $y_1(x) = x^2$ dan $y_2(x) = x^3$ memenuhi syarat awal $y(0) = y'(0) = 0$
- D. Teorem Kewujudan dan Keunikan (TWU) menjamin suatu penyelesaian unik wujud bagi semua nilai x dalam selang $(-\infty, \infty)$
- E. Teorem Kewujudan dan Keunikan (TWU) **tidak** menjamin suatu penyelesaian unik wujud bagi semua nilai x dalam selang $(-\infty, \infty)$

4. Pertimbangkan masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad y(2) = -1 \quad (\text{I})$$

Pilih pernyataan yang **tidak benar** bagi persamaan pembezaan (I).

- A. $y_1(x) = 1 - x$ adalah suatu penyelesaian bagi masalah nilai awal (I) bagi $x \geq 2$
- B. $y_2(x) = -x^2 / 4$ adalah suatu penyelesaian bagi semua nilai x .
- C. f_y tidak selanjar pada lengkung $y = -x^2 / 4$
- D. f_y tidak selanjar pada titik $(2, -1)$
- E. masalah nilai awal (I) mempunyai sekurang – kurangnya dua penyelesaian dan hal ini bercanggah dengan Teorem Kewujudan dan Keunikan (TWU)

5. Tentukan langkah silap yang pertama dalam penyelesaian persamaan pembezaan

$$y' = \frac{y^2 e^{xy^2} + 4x^3}{3y^2 - 2xye^{xy^2}} \quad (\text{II})$$

- A. $M(x, y) = y^2 e^{xy^2} + 4x^3$
- B. $N(x, y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$
- C. $u(x, y) = e^{xy^2} + x^4 + f(x)$
- D. $u(x, y) = e^{xy^2} + x^4 + h(y)$
- E. $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + h'(y)$

6. Penyelesaian am bagi persamaan pembezaan (II) ialah

A. $e^{y^2} + x^4 - y^3 = C$

B. $e^{xy^2} + 4x^3 - y^2 = C$

C. $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = C$

D. $y^2 e^{-xy^2} + x^4 - y^3 = C$

E. $e^{xy^2} + x^4 - 3y^2 = C$

7. Suatu fungsi $N(x, y)$ supaya persamaan pembezaan

$$(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2 + y})dx + N(x, y)dy = 0$$

tepat ialah

A. $y^{-1/2}x^{1/2} + \frac{1}{2}(x^2 + y) + h(x)$

B. $y^{-1/2}x^{1/2} + \frac{1}{2}(x^2 + y) + k(y)$

C. $\frac{1}{2}y^{-1/2}x^{1/2} + \frac{1}{2}(x^2 + y) + k(y)$

D. $y^{-1/2}x^{1/2} + (x^2 + y) + k(y)$

E. $\frac{1}{2}y^{-1/2}x^{-1/2} - \frac{x}{(x^2 + y)^2}$

8. Diberikan persamaan pembezaan

$$(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0 \quad \text{(III)}$$

Penggantian yang sesuai untuk menyelesaikan persamaan pembezaan (III) ialah

A. $X = x + 1, Y = y - 1$

B. $X = x - 1, Y = y + 1$

C. $X = x - 2, Y = y - 1$

D. $X = x - 1, Y = y - 1$

E. $X = x - 1, Y = y - 2$

9. Menggunakan transformasi $V = \frac{Y}{X}$ persamaan pembezaan (III) boleh ditukar kepada satu persamaan pembezaan terpisahkan. Pilih persamaan pembezaan terpisahkan tersebut daripada yang berikut:

A. $(2 - 5V)dX - X(2 + 4V)dV = 0$

B. $(2 - 7V - 4V^2)dX - (2 + 4V)dV = 0$

C. $(2 - 7V - 4V^2)dX - V(2 + 4V)dV = 0$

D. $(2 - 7V - 4V^2)dX - X(2 + 4V)dV = 0$

E. $(2 - 5V)dX - V(2 + 4V)dV = 0$

10. Pilih pernyataan yang **tidak benar** bagi persamaan pembezaan

$$(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0 \quad (\text{IV})$$

A. Satu persamaan pembezaan homogen berdarjah 1

B. $-\frac{(2x + 3y)}{(y - x)}$ adalah homogen berdarjah sifar

C. Penggantian $y = vx$ akan menukarkan persamaan pembezaan (IV) kepada persamaan pembolehubah terpisah $(v^2 + 2v + 2)dx + x(v - 1)dv = 0$

D. $\frac{dy}{dx}$ adalah homogen berdarjah 1

E. $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$

11. Selesaikan persamaan pembezaan $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$

A. $y = \frac{3}{2}e^{-3x}x^2 + Ce^{-3x}$

B. $y = \frac{3}{2}e^{-3x} + Ce^{-3x}$

C. $y = \frac{3}{2}xe^{-3x} + Ce^{-3x}$

D. $y = \frac{3}{2}xe^{-3x}x^2 + Ce^{-3x}$

E. Bukan semua yang di atas.

12. Masalah nilai awal $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4$, $y(2) = 8$ mempunyai penyelesaian

A. $y = x^3 - 2x^2$

B. $y = x^4 - 2x^2$

C. $y = x^4 - 2x$

D. $y = x^3 - 2x$

E. $y = x^4 - x^2$

13. Penyelesaian am bagi $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$ ialah

A. $\frac{1}{y^4} = -x - \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$

B. $\frac{1}{y^4} = -x + 1 + Ce^{-4x}$

C. $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-3x}$

D. $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$

E. $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{4x}$

14. Selesaikan masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$, $y(0) = 1$

A. $\frac{1}{y^4} = -x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-4x}$

B. $\frac{1}{y^4} = 1 - x$

C. $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-3x}$

D. $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{4x}$

E. $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4x}$

Arahan: Untuk soalan (15), (16), (17) dan (18) adalah berkaitan dengan persamaan

pembezaan $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = g(x)$

15. Penyelesaian pelengkap y_p adalah

A. $C_1e^x + C_2e^{2x}$

B. $C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$

C. $C_1e^x + C_2xe^x$

D. $C_1e^x + C_2e^{-2x}$

E. $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

16. Penyelesaian khusus, y_k , jika $g(x) = 2e^{2x}$ ialah

A. $2x^2e^{2x}$

B. $2e^{2x}$

C. xe^{2x}

D. $3xe^{2x}$

E. $2xe^{2x}$

17. Penyelesaian khusus, y_k , jika $g(x) = \sin 2x$ ialah

- A. $\frac{3}{20} \cos 2x - \frac{1}{20} \sin 2x$ B. $-\frac{3}{20} \cos 2x - \frac{1}{20} \sin 2x$
 C. $\frac{3}{20} \cos 2x + \frac{1}{20} \sin 2x$ D. $\frac{1}{20} \cos 2x - \frac{3}{20} \sin 2x$
 E. $\frac{1}{20} \cos 2x + \frac{3}{20} \sin 2x$

18. Penyelesaian khusus, y_k , jika $g(x) = 2e^x - 10 \cos x$ ialah

- A. $-2e^x - \cos x + 3 \sin x$ B. $-2xe^x + \cos x + 3 \sin x$
 C. $-2xe^x - \cos x - 3 \sin x$ D. $-2xe^x - \cos x + 3 \sin x$
 E. Bukan semua yang di atas

19. Jika diberi $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ maka dapatkan dua penyelesaian yang tak bersandar

linear y_1 dan y_2 yang memenuhi syarat $y_1(0) = 1$, $\frac{dy_1}{dx}(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ dan

$$\frac{dy_2}{dx}(0) = 1.$$

- A. $y_1 = -e^{2x}$ dan $y_2 = -e^x + e^{2x}$
 B. $y_1 = 2e^x$ dan $y_2 = e^{2x}$
 C. $y_1 = 2e^x - e^{2x}$ dan $y_2 = -e^x + e^{2x}$
 D. $y_1 = e^x - 2e^{2x}$ dan $y_2 = -e^x + e^{2x}$
 E. $y_1 = 2e^x - e^{2x}$ dan $y_2 = -2e^x + e^{2x}$

20. Penyelesaian pelengkap bagi $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$ ialah

A. $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

B. $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

C. $C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

D. $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x$

E. Bukan semua yang di atas

21. Dapatkan penyelesaian khusus, y_k , bagi persamaan pembezaan $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$,
 $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

A. $\cos x \ln(\sec x + \tan x)$

B. $-\cos x \ln(\sec x + \tan x)$

C. $\sin x \ln(\sec x + \tan x)$

D. $-\sin x \ln(\sec x + \tan x)$

E. Bukan semua yang di atas

[Petunjuk: $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$]

22. Jika $y_1(x) = x$ adalah satu penyelesaian bagi $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$, cari penyelesaian keduanya.

A. $y_2(x) = \frac{1}{2x}$

B. $y_2(x) = -\frac{1}{x}$

C. $y_2(x) = \frac{1}{x}$

D. $y_2(x) = -\frac{1}{2x^2}$

E. $y_2(x) = -\frac{1}{2x}$

Arahan: Jawab soalan – soalan (23), (24) dan (25) berpandukan maklumat berikut:
Diberi x , y dan z adalah fungsi – fungsi dari t dan

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 3y - 2z, \quad \frac{dz}{dt} = -y + 3z.$$

Katakan $\tilde{W} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dan M ialah suatu matriks 3×3 supaya $\tilde{W}'(t) = M \tilde{W}(t)$.

23. $M =$

A. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. Nilai – nilai eigen bagi M adalah

A. -1, 3, 5

B. 1, 3, 5

C. 1, -5, 3

D. 1, -3, 5

E. -1, 3, -5

25. Suatu matriks penyelesaian asas diberikan oleh

A. $\begin{pmatrix} 2e^{-t} & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^{-t} & 0 & -2e^{5t} \\ e^{-t} & -e^{3t} & e^{5t} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2e^t & 2e^{-3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -e^{-3t} & e^{5t} \end{pmatrix}$

$$\text{C. } \begin{pmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{-5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{-5t} \\ e^t & -e^{3t} & e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$\text{D. } \begin{pmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -e^{3t} & e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\text{E. } \begin{pmatrix} 2e^{-t} & 2e^{3t} & 2e^{-5t} \\ 2e^{-t} & 0 & -2e^{-5t} \\ e^{-t} & -e^{3t} & e^{-5t} \end{pmatrix}$$

BAHAGIAN II. Jawab semua soalan. [50/100]

1. (a) Pertimbangkan persamaan pembezaan $a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = 0$ di mana $a(x) \neq 0, \forall x \in I, a(x), b(x)$ dan $c(x)$ selanjar pada I . Buktikan bahawa jika $\phi_1(x)$ dan $\phi_2(x)$ adalah dua penyelesaian yang tak bersandar linear pada I bagi persamaan pembezaan di atas maka Wronskian bagi kedua-dua fungsi tersebut, $W(\phi_1, \phi_2) \neq 0, \forall x \in I$.
- (b) Cari penyelesaian berangka bagi masalah nilai awal $\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$ apabila $x = 0.3$. Gunakan kaedah Euler dengan $h = 0.1$. Dapatkan penyelesaian tepat masalah nilai awal di atas dan hitungkan peratusan ralat relatifnya.

[25 markah]

2. (a) Dapatkan penyelesaian am bagi sistem tak homogen

$$\frac{dX}{dt} = X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

pada selang $(-\infty, \infty)$.

- (b) Dalam suatu model yang meramalkan kelakuan pengguna terhadap barangan A , pembolehubah – pembolehubah yang asas, dalam masa t , adalah

 $X(t)$ - paras pembelian bagi A $Y(t)$ - sikap terhadap A $H(t)$ - paras perhubungan bagi A (misalnya iklan)

dan pembolehubah – pembolehubah ini dianggap dihubungi dengan

$$X' = b(-\beta X + Y)$$

$$Y' = a(X - \alpha Y) + \gamma H$$

di mana a, b, α, β dan γ adalah nombor positif dan X', Y' adalah terbitan terhadap t .

- (i) Tunjukkan bahawa

$$X'' + (b\beta + a\alpha)X' + ab(\alpha\beta - 1)X = b\gamma H.$$

- (ii) Katakan paras perhubungan bagi A dijadikan tetap sepanjang masa, iaitu

$$H(t) = h \text{ bagi semua } t > 0$$

(h adalah suatu nombor tetap).

Tunjukkan bahawa penyelesaian am bagi persamaan pembezaan peringkat kedua dalam (i) ialah

$$X = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\gamma h}{a(\alpha\beta - 1)}$$

di mana

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left\{ -(b\beta + a\alpha) + [(b\beta - a\alpha)^2 + 4ab]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ -(b\beta + a\alpha) - [(b\beta - a\alpha)^2 + 4ab]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

dan c_1, c_2 adalah pemalar sebarang.

(iii) Jika $\alpha\beta > 1$, tunjukkan bahawa

$$X \rightarrow \frac{\gamma h}{a(\alpha\beta - 1)} \quad \text{apabila} \quad t \rightarrow \infty.$$

(iaitu paras pembelian mendekati suatu paras keseimbangan).

[25 markah]