

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang  
Sidang Akademik 2004/2005

Mei 2005

**MAT 122 – PERSAMAAN PEMBEZAAN 1**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua EMPAT [4]** soalan.

...2/-

1. (a) Selesaikan

(i)  $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

(ii)  $\frac{dy}{dx} - y = xy^5, y(0) = 2$

(iii)  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^x - \sin x$

(iv)  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(b) Cari penyelesaian kedua bagi  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$  dengan menggunakan kaedah perubahan parameter, jika  $y_1(x) = x$  adalah satu penyelesaiannya.

(c) Dapatkan penyelesaian siri kuasa bagi persamaan pembezaan  $\frac{d^2y}{dx^2} = xy$ ,  $-\infty < x < \infty$  sekitar  $x = 0$ . Dapatkan batas bawah jejari penumpuan penyelesaian siri tersebut.

[25 markah]

2. (a) (i) Tentusahkan bahawa fungsi – fungsi  $y_1(x) = 1 - x$  dan  $y_2(x) = -x^2 / 4$  setiap satunya adalah penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$y' = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad y(2) = -1$$

(ii) Di manakah setiap penyelesaian ini sah?

(iii) Terangkan mengapakah kewujudan dua penyelesaian bagi masalah nilai awal di atas tidak bercanggah dengan Teorem Kewujudan dan Keunikan.

(b) (i) Tunjukkan bahawa  $\frac{1}{Mx - Ny}$  bila  $Mx - Ny$  tidak sama dengan 0 secara secaman, adalah suatu faktor pengamir bagi persamaan

$$\begin{aligned} Mdx + Ndy \\ = yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0 \end{aligned}$$

...3/-

(ii) Seterusnya, selesaikan

$$y(x^2 y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2 y^2)dy = 0$$

(c) Selesaikan persamaan pembezaan

$$x \frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$$

[25 markah]

3. (a) Buktikan bahawa jika  $\phi_1(x)$  dan  $\phi_2(x)$  ialah penyelesaian bagi persamaan pembezaan linear dan homogen  $a(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + b(x) \frac{dy}{dx} + c(x)y = 0$  di mana  $a(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $a(x)$ ,  $b(x)$  dan  $c(x)$  selanjut pada  $I$  maka  $c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$  dengan  $c_1$  dan  $c_2$  sebagai pemalar sebarang, adalah juga suatu penyelesaian persamaan pembezaan tersebut.

(b) Gunakan kaedah Euler untuk mendapatkan penyelesaian berangka bagi masalah nilai awal  $\frac{dy}{dx} = 2xy$ ,  $y(0) = 1$  apabila  $x = 1.5$ . Gunakan  $h = 0.1$ . Dapatkan penyelesaian tepat masalah nilai awal di atas dan hitungkan peratusan ralat relatifnya.

[25 markah]

4. (a) Diberikan  $x$ ,  $y$  dan  $z$  adalah fungsi – fungsi dari  $t$  dan

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \frac{dy}{dt} = -x + 3y - 2z, \frac{dz}{dt} = -y + 3z,$$

selesaikan sistem persamaan pembezaan tersebut.

(b) Perkembangan bagi dua spesis yang bersaing untuk suatu sumber makanan diwakili oleh dua persamaan

$$\frac{dx}{dt} = ax - by, \quad \frac{dy}{dt} = -cx + dy$$

dengan  $x, y$  sebagai populasi kedua – dua spesis dan  $a, b, c, d$  ialah pemalar – pemalar positif.

(i) Tunjukkan bahawa  $x$  memenuhi

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a+d)\frac{dx}{dt} + (ad-bc)x = 0$$

(ii) Tunjukkan bahawa  $x$  mempunyai penyelesaian di dalam bentuk

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

dengan sekurang – kurangnya satu  $\alpha_i$  positif.

(iii) Cari penyelesaian bagi  $x$ .

(iv) Dengan menggunakan nilai  $a=d=4$ ,  $b=1$ ,  $c=4$  dan  $x(0)=700$ ,  $y(0)=3400$ , tentukan bilakah satu spesis menjadi pupus.

[25 markah]

-ooo000ooo-