**UNIVERSITI SAINS MALAYSIA**

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

**MAT 111 – ALJABAR LINEAR**

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** soalan di dalam **LIMA [5]** halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Katakan $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ dengan $a_{12}=-4$ , $a_{13}=-7$ dan $a_{ij}=\alpha i+\beta j$. Dapatkan $A$.

[Petunjuk: Dapatkan $\alpha$ dan $\beta$ dahulu].

[20 markah]

(b) Diberi matriks

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} \quad ; \qquad B=\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\ 6 & 4 & 7\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad C=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$$

(i) Dapatkan $AB$, $BA$ dan $A^TB^T$.

(ii) Tunjukkan pangkat $(AC) \leq 2$.

(iii) Dapatkan syarat-syarat $a, b, c, d, e, f$ supaya pangkat $(AC) = 1$.

(iv) Cari semua matriks $D$ sedemikian hingga $DA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

[50 markah]

(c) (i) Cari $x$ dan $B$, jika $B=\begin{bmatrix}4 & x+2\\ 2x-3 & x+1\end{bmatrix}$ adalah simetri.

(ii) Jika $A$ adalah matriks simetri dan simetri pencong n×n, tentukan $A$.

[30 markah]

2. (a) Diberi $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & a\end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahawa matriks identiti $I_3$ adalah **bentuk eselon baris terturun (B.E.B.T.)** bagi $C$ jika hanya jika $a \neq -1$.

[30 markah]

(b) Pertimbangkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Cari matriks baris permulaan (M.B.P.) $E_1$ dan $E_2$ (dalam bentuk matriks) sedemikian hingga $E_2E_1A = I$.

(ii) Tulis $A^{-1}$ sebagai suatu hasildarab dua M.B.P.

(iii) Tulis $A$ sebagai suatu hasildarab dua M.B.P.

[30 markah]

(c) (i) Tunjukkan bahawa kenyataan berikut adalah benar, atau, berikan satu contoh yang menunjukkan ianya tidak benar:

"Hasildarab dua M.B.P adalah suatu M.B.P juga".

(ii) Jika $A$ dan $B$ adalah matriks $n \times n$ dan $AB$ tak singular, buktikan $A$ dan $B$ tak singular.

[40 markah]

3. (a) Diberi sistem persamaan

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & & = & \beta \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \alpha x_4 & = & 6 \end{array}$$

Tentukan nilai-nilai $\alpha$ dan $\beta$ supaya sistem persamaan di atas

(i) mempunyai penyelesaian unik.

(ii) mempunyai bilangan penyelesaian yang tak terhingga banyaknya.

(iii) tak konsisten.

[40 markah]

(b) (i) Diberi

$$M = \begin{bmatrix} x^3 & 3 & 8 \\ x & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Cari nilai-nilai $x$ supaya matriks $M$ tak singular.

(ii) Jika $A$ adalah matriks $n\times n$ dan $A^2=0$, tunjukkan bahawa $(I+A)$ adalah tak singular.

[30 markah]

(c) Diberi bahawa vektor $v$ adalah suatu gabungan linear vektor-vektor $u_1$, $u_2$ dan $u_3$.

(i) Tuliskan persamaan yang mewakili hubungan $v$ dengan $u_1$, $u_2$ dan $u_3$.

(ii) Jika $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, berikan gabungan linear $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan $u_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ yang mewakili vektor $v$.

[30 markah]

4. (a) Tunjukkan bahawa $U$ dan $W$ berikut bukan subruang $\Re^3$.

(i) $U = \{(a,b,c) \mid a \geq 0\}$.

(ii) $W = \{(a,b,c) \mid a^2 + b^2 + c^2 \leq 2\}$.

[20 markha]

(b) (i) Andai $U$ dan $W$ adalah subruang dari ruang vektor $V$ dan $S = \{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_p\}$ merentang $U$ dan $S' = \{w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, w_q\}$ merentang $W$. Tunjukkan bahawa $S \cup S'$ merentang $U + W$.

(ii) Andai $u$, $v$, $w$ adalah vektor-vektor yang tak bersandar linear. Buktikan bahawa $T = \{u + v - 2w,\ u - v - w,\ u + w\}$ juga tak bersandar linear.

[40 markah]

(c) Diberi

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Tentukan sama ada $B$ terpepenjurukan atau tidak.

(ii) Buktikan bahawa jika suatu matriks $C$ tak singular dan $\lambda$ ialah nilai eigen bagi $C$, maka $\lambda^{-1}$ ialah nilai eigen bagi $C^{-1}$.

[40 markah]

-ooo000ooo-