UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2003/2004

September / Oktober 2003

MAT 111 – Aljabar Linear

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** soalan dalam **LIMA [5]** halaman muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan.

1. (a) Dalam setiap bahagian berikut, cari matriks 4×4 $A = [a_{ij}]$ yang mana pemasukan-pemasukannya memenuhi syarat-syarat yang diberi:

(i) $a_{ij} = i + j$

(ii) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

(iii) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } |i-j| > 1 \\ -1 & \text{jika } |i-j| \le 1 \end{cases}$

[35 markah]

(b) (i) Cari semua nilai a, b dan c supaya F adalah simetri bila

$$F = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

(ii) Diberi bahawa matriks G dan H adalah simetri pencong. Buktikan bahawa $G + H$ adalah simetri pencong.

(iii) Tunjukkan bahawa jika suatu matriks segiempat sama M memenuhi persamaan $M^2 + 2M + I = \tilde{0}$, maka M mesti tak singular. Nyatakan songsangnya.

[30 markah]

(c) (i) Tunjukkan bahawa jika

$$p(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc) \quad \text{dan} \quad D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

maka $p(D) = \tilde{0}$.

(ii) Andai $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{bmatrix}$. Jika $P = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$, cari nilai-nilai a, b dan c sedemikian hingga $P^3 = Q$.

[35 markah]

(a) Pertimbangkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(i) Cari matriks baris permulaan (M.B.P) E_1 dan E_2 (dalam bentuk matriks) sedemikian hingga $E_2.E_1.A = I$.

(ii) Tulis A^{-1} sebagai suatu hasildarab dua M.B.P.

(iii) Tulis A sebagai suatu hasildarab dua M.B.P.

[25 markah]

(b) (i) Turunkan matriks

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

kepada bentuk eselon baris terturun (B.E.B.T) tanpa mewujudkan pecahan pada mana-mana langkah. Apakah pangkat B, $r(B)$?

(ii) Tentukan nilai-nilai a bila sistem berikut mempunyai penyelesaian unik, mempunyai penyelesaian yang tak terhingga banyaknya dan bila ia tak konsisten.

$$\begin{aligned} x + \quad 2y \quad &= 1 \\ 2x + (a^2 - 5)y &= a - 1 \end{aligned}$$

(iii) Pertimbangkan sistem linear

$$\begin{aligned} 2x_1 - \ x_2 \qquad &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + \ x_2 + x_3 &= \lambda x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

dengan λ suatu pemalar. Selesaikan sistem ini dengan mengambil $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

[45 markah]

(c) Buktikan yang berikut:

(i) Jika E adalah suatu M.B.P, maka $EX = B$ mempunyai penyelesaian unik.

(ii) Jika $A \in M_{2\times 3}$, maka $AX = \tilde{0}$ mempunyai penyelesaian yang tak terhingga banyaknya.

(iii) Jika $A = [a_{ij}] \in M_{3\times 3}$ dengan $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$ dan $a_{ij} = 0$ bagi $i \neq j$, maka sistem $AX = B$ mempunyai penyelesaian unik.

Amaran: Bukti secara contoh tertentu akan diberi markah kosong!

[30 markah]

3. (a) (i) Diberi

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Kirakan $|A|$ menggunakan kembangan kofaktor di sepanjang baris atau lajur yang sesuai **bermula dengan kembangan kofaktor pada lajur 3.**
(Jangan gunakan O.B.P dalam penyelesaian ini!)

(ii) Diberi

$$B=\begin{bmatrix} x+1 & x-1 & x & 1 \\ 2x+2 & x-2 & x^2 & 2 \\ 3x+3 & x-3 & x^3 & 3 \\ 4x+4 & x-4 & x^4 & 4 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahawa $|B|=0$.

[40 markah]

(b) Menggunakan kaedah penentu,

(i) tentukan samada $S=\{(0,0,2,2),(3,3,0,0),(1,1,0,-1),(4,4,2,1)\}$ bersandar linear atau tak bersandar linear.

(ii) tunjukkan bahawa

$$\begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \text{kos}^2\alpha & \text{kos}^2\beta & \text{kos}^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tidak mempunyai songsang bagi sebarang nilai α, β dan γ.

[30 markah]

(c) Cari nilai-nilai x(jika wujud) yang akan mengakibatkan matriks

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & x \end{bmatrix}$$

mempunyai sekurang-kurangnya satu nilai eigen λ' yang berulang (kegandaan λ' >1).

[Petunjuk:Gunakan rumus punca persamaan kuadratik $\lambda=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ bagi persamaan $a\lambda^2+b\lambda+c=0$].

[30 markah]

4. (a) Pertimbangkan operator linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ yang ditakrifkan dengan

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2x_1+x_2-x_3 \\ x_1-2x_2-x_3 \\ -x_1-x_2-2x_3 \end{bmatrix}$$

(i) Dapatkan matriks piawai A yang mewakili T.

(ii) Cari semua nilai eigen A dan tunjukkan bahawa A adalah terpepenjurukan.

[25 markah]

(b) Diberi

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(i) Tunjukkan bahawa $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah asas bagi $\mathbb{R}^3$.

(ii) Tuliskan $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ sebagai gabungan linear v_1, v_2 dan v_3.

[30 markah]

(c) Buktikan bahawa:

(i) Jika W_1 dan W_2 adalah subruang dari ruang vektor V yang berdimensi terhingga maka

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim W_2 .$$

[Petunjuk: Katakan $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ suatu asas bagi $W_1 \cap W_2$ dengan $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}$ suatu asas bagi W_1 dan $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t\}$ suatu asas bagi W_2. Tunjukkan bahawa $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t\}$ suatu asas bagi W_1+W_2].

(ii) Jika A dan B adalah matriks $n \times n$ dan X berada di dalam ruang nol B maka X berada di dalam ruang nol AB.

(iii) [0 0 1 0 0] berada di dalam ruang baris C jika

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[45 markah]

-ooo0ooo-