UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2004/2005

Mei 2005

MAT 111 – ALJABAR LINEAR

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM [6]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan

1. (a) (i) Cari matriks $A=[a_{ij}]_{4\times 4}$ yang mempunyai pemasukan-pemasukan

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{jika } |i-j|>1 \\ -1 & \text{jika } |i-j|\le 1 \end{cases}$$

(ii) Berikan takrif matriks segitiga atas. Tunjukkan bahawa jika C dan D adalah matriks segitiga atas maka $C+D$ juga suatu matriks segitiga atas.

[30 markah]

(b) (i) Hitungkan yang berikut:

$$\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}+6\begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)^T$$

(ii) Diberi $A, B, C \in M_{n\times n}$ adalah tak singular. Selesaikan

$$\left[(2C)^{-1}B\right]^{-1}+B^{-1}A=I_n$$

untuk C.

[30 markah]

(c) (i) Diberi A sebarang matriks segiempat sama yang tak singular, tunjukkan bahawa

$$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$$

(ii) Suatu matriks $n\times n$ B dipanggil matriks simetri jika $B^T=B$.
Tunjukkan bahawa jika P dan Q adalah matriks simetri, maka P^T, P^{-1} dan $P+Q$ juga adalah matriks simetri.

[25 markah]

(d) Dalam setiap kes berikut, tunjukkan bahawa kenyataan adalah benar atau berikan contoh lawan untuk menunjukkan ia adalah salah.

(i) Jika A dan B adalah sebarang matriks $n\times n$ maka persamaan $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ sentiasa benar.

(ii) Transposisi suatu matriks baris permulaan($\mathrm{M\cdot B\cdot P}$) adalah suatu $\mathrm{M\cdot B\cdot P}$.

(iii) Jika sistem persamaan $AX=B$ tidak mempunyai penyelesaian untuk sebarang lajur $B\,(B\neq\tilde{0})$, maka sistem persamaan $AX=\tilde{0}$ juga tidak mempunyai penyelesaian.

[15 markah]

2. (a) Diberi sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 \quad\quad &= 5 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 \quad\quad - x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(i) Andai sistem ini diwakili oleh persamaan $AX=B$. Tuliskan sistem ini dalam bentuk matriks imbuhan $\left[A \mid B\right]$.

(ii) Gunakan penghapusan Gaussian untuk menurunkan matriks $\left[A \mid B\right]$ tersebut ke bentuk eselon baris $(\mathrm{B \cdot E \cdot B})$.

(iii) Nyatakan pangkat bagi A dan $\left[A \mid B\right]$.

(iv) Adakah sistem ini konsisten? Jika ya, berikan penyelesaian bagi sistem. Jika tidak, beri penjelasan mengapa ia tidak konsisten.

[30 markah]

(b) Diberi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -c & c \\ 1 & 1 & -1 \\ c & -c & 1 \end{bmatrix}$$

Cari nilai c sedemikian hingga A mempunyai songsang (tak singular).

[20 markah]

(c) Diberi bahawa B adalah berortogon jika $B^T B = I$. Tunjukkan bahawa jika B adalah berortogon maka $|B| = \pm 1$.

[10 markah]

(d) Dalam setiap bahagian berikut, tunjukkan bahawa kenyataan adalah benar atau berikan contoh lawan jika kenyataan adalah salah. Andai sistem persamaan $AX = B$ diwakili oleh $\left[A \mid B\right]$.

(i) Jika $\mathrm{B \cdot E \cdot B \cdot T}\left[A \mid B\right]$ mempunyai suatu baris sifar, maka bilangan penyelesaian adalah tak terhingga banyaknya.

(ii) Jika terdapat lebih anu dari persamaan dan $\left[A \mid B\right]$ adalah konsisten, maka bilangan penyelesaian adalah tak terhingga banyaknya.

(iii) Pangkat $A \leq$ Pangkat $\left[A \mid B\right]$.

(iv) Pangkat $\left[A \mid B\right] \leq 1 +$ Pangkat A.

(v) Jika setiap baris dari $\mathrm{B \cdot E \cdot B \cdot T}\left[A \mid B\right]$ mempunyai pemasukan 1 utama, sistem mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian.

[40 markah]

3. (a) (i) Biar $S=\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ dengan operasi-operasi penambahan dan pendaraban skalar tertakrif sebagai:

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (xx',yy')\\ \alpha(x,y) &= (\alpha x,\alpha y) \quad , \alpha\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Tunjukkan dua syarat/axiom ruang vektor yang tidak dipenuhi oleh S. Deduksikan bahawa S bukan suatu ruang vektor.
[Petunjuk: Vektor sifar wujud dengan mengambil $\tilde{0}=(1,1)$].

(ii) Tunjukkan bahawa

$$T=\left\{\begin{bmatrix} a\\ a+b\\ b\end{bmatrix}\middle|\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

adalah subruang $\mathbb{R}^3$. Apakah dimensi T?

[20 markah]

(b) Diberi

$$X=\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\2\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix},\ v_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\5\\3\end{bmatrix},\ v_4=\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\5\end{bmatrix}\right\}$$

(i) Menggunakan penentu, tunjukkan bahawa X bersandar linear.

(ii) Dapatkan subset $Y\subseteq X$ sedemikian hingga Y adalah asas subruang yang direntang oleh X, *Span*(X).
[Petunjuk: Gunakan (i) dan teknik mencari asas ruang lajur]

[20 markah]

(c) Diberi $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

(i) Dapatkan asas ruang nol A, $N(A)$.

(ii) Apakah *Dim* $N(A)$?

[20 markah]

(d) Dalam setiap kes berikut tunjukkan bahawa kenyataan adalah benar atau berikan contoh lawan untuk menunjukkan kenyataan adalah salah.

(i) Jika $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ dan $Span(\{u, v, w\}) = W$, maka $W = \mathbb{R}^3$.

(ii) Jika $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq \mathbb{R}^3$ maka S bersandar linear.

(iii) Andai $\{u, v\}$ adalah tak bersandar linear maka $\{u, v, u+v\}$ adalah tak bersandar linear.

(iv) Jika salah satu vektor daripada $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n$ adalah vektor sifar maka $\{v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n\}$ bersandar linear.

(v) Jika $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n\}$ adalah asas $\mathbb{R}^n$ dan A adalah matriks tak singular $n \times n$, maka $\{Au_1, Au_2, Au_3, Au_4, \ldots, Au_n\}$ adalah asas $\mathbb{R}^n$ juga.

[40 markah]

4. (a) Takrif $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahawa T adalah transformasi linear dan dapatkan matriks piawai A yang mewakili T.

[10 markah]

(b) (i) Cari suatu transformasi linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ yang mempunyai sifat-sifat berikut dan kirakan $T(v)$.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

(ii) Biarkan transformasi linear $T : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ ditakrif sebagai $T(A) = A - A^T$ untuk semua $A \in M_{n\times n}$. Dapatkan ker T dan Im T.

[30 markah]

(c) Diberi

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(i) Dapatkan polinomial cirian bagi A.
(ii) Apakah nilai-nilai eigen A?
(iii) Terangkan mengapa A adalah terpepenjurukan.
(iv) Dapatkan matriks tak singular P dan matriks pepenjuru D sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$.

[40 markah]

(d) Dalam setiap kes berikut tunjukkan bahawa kenyataan adalah benar atau berikan contoh lawan untuk menunjukkan kenyataan adalah salah.

(i) Jika $A^{-1} = A$ dan λ adalah nilai eigen bagi A, maka $\lambda = \pm 1$.
(ii) Semua matriks yang terpepenjurukan adalah simetri.
(iii) Jika $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linear dan $\ker T = V$, maka $W = \{\tilde{0}\}$.

[20 markah]

- ooo O ooo -