UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MAT 111 – ALJABAR LINEAR

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM [6]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan

1. (a) (i) Cari matriks $A=[a_{ji}]_{4\times 4}$ yang mempunyai pemasukan-pemasukan

$$a_{ij}=i^{j-1}$$

(ii) Berikan takrif matriks pepenjuru. Tunjukkan bahawa jika C dan D adalah matriks pepenjuru maka $C+D$ juga suatu matriks pepenjuru.

[30 markah]

(b) (i) Hitungkan yang berikut:

$$3\left(\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 4 & -9\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}-21\begin{bmatrix}2 & 0 & 12\\ -15 & -3 & 2\\ 12 & -8 & -32\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & -5 & -43\\ 0 & 7 & 0\\ 21 & 45 & -34\end{bmatrix}\right)^T$$

(ii) Tentusahkan bahawa $A^2-5A+4I=0$ jika $A=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{bmatrix}$

[30 markah]

(c) (i) Diberi A sebarang matriks segiempat sama yang tak singular, tunjukkan bahawa

$$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$$

(ii) Suatu matriks P dipanggil matriks ortogon jika $P^T=P^{-1}$.
Tunjukkan bahawa jika P dan Q adalah matriks ortogon $n\times n$, maka P^T, P^{-1} dan PQ juga adalah matriks ortogon.

[25 markah]

(d) Dalam setiap kes berikut, tunjukkan bahawa kenyataan adalah benar atau berikan contoh lawan untuk menunjukkan ia adalah salah.

(i) Jika $B=EA$ dengan E suatu matriks baris permulaan $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{P})$, maka $A=FB$ bagi suatu $\mathrm{M}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{P}$ F.

(ii) Hasildarab dua $\mathrm{M}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{P}$ adalah suatu $\mathrm{M}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{P}$.

(iii) A dan A^T mempunyai pemasukan-pemasukan pepenjuru yang sama untuk semua matriks segiempat sama A.

[15 markah]

2. (a) Diberi sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 &= 1\\
-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 &= 3\\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 1\\
-3x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 3x_5 &= 1
\end{aligned}$$

(i) Andai sistem ini diwakili oleh persamaan AX=B. Tuliskan sistem ini dalam bentuk matriks imbuhan $\left[A \mid B\right]$.

(ii) Gunakan penghapusan Gauss-Jordan untuk menurunkan matriks $\left[A \mid B\right]$ tersebut ke bentuk eselon baris terturun $(\mathrm{B \cdot E \cdot B \cdot T})$.

(iii) Nyatakan pangkat bagi A dan $\left[A \mid B\right]$.

(iv) Adakah sistem ini konsisten? Jika ya, berikan penyelesaian bagi sistem. Jika tidak, beri penjelasan mengapa ia tidak konsisten.

[30 markah]

(b) Diberi

$$B = \begin{bmatrix} c+3 & 2 & 3 \\ 4 & c+1 & 3 \\ c+3 & 2 & c+2 \end{bmatrix}$$

(i) Dapatkan penentu B, $|B|$ dan permudahkannya kepada bentuk $(\alpha c+\beta)^2(\gamma c+\delta)$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

(ii) Menggunakan (i), tentusahkan bahawa A adalah singular jika $c = \dfrac{-\beta}{\alpha}$ atau $c = \dfrac{-\delta}{\gamma}$

[20 markah]

(c) Diberi bahawa $|EA| = |E||A|$ untuk sebarang matriks $n \times n$ A dan sebarang $\mathrm{M \cdot B \cdot P}$ E. Buktikan bahawa jika A dan B adalah matriks $n \times n$ maka $|AB| = |A||B|$.

[Petunjuk: Pertimbangkan dua kes iaitu bila A singular dan bila A tak singular]

[10 markah]

(d) Dalam setiap bahagian berikut, tunjukkan bahawa kenyataan adalah benar atau berikan contoh lawan jika kenyataan adalah salah. Andai sistem persamaan diwakili oleh $\left[A \mid B\right]$ dengan matriks koefisien A dan $R = \mathrm{B \cdot E \cdot B \cdot T}$ bagi $\left[A \mid B\right]$.

(i) $\left[A \mid B\right]$ dan R mempunyai saiz yang sama.

(ii) Jika ada lebih dari satu penyelesaian, R mesti mempunyai baris sifar.

(iii) Jika setiap baris dari R mempunyai pemasukan1 utama, sistem mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian.

(iv) Jika $\left[A \mid B\right]$ adalah matriks $m \times n$ dan $r(A|B) = m$, maka sistem adalah konsisten.

[40 markah]

3. (a) (i) Biar $S=\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ dengan operasi-operasi penambahan dan pendaraban skalar tertakrif sebagai:

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x'+1, y+y'+1)\\ \alpha(x,y) &= (\alpha x, \alpha y)\end{aligned}$$

Tunjukkan dua syarat/axiom ruang vektor yang tidak dipenuhi oleh S. Deduksikan bahawa S bukan suatu ruang vektor.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$T\left\{\begin{bmatrix}2\alpha-\beta\\ \alpha-3\beta\\ -\alpha+\beta\\ \beta\end{bmatrix} \middle|\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

adalah subruang $\mathbb{R}^4$.

[20 markah]

(b) Diberi

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\3\\-5\\0\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\-1\end{bmatrix},\quad v_4=\begin{bmatrix}3\\6\\-3\\-2\end{bmatrix}$$

(i) Andai matriks $A=[v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$ Apakah $|A|$?

(ii) Menggunakan (i), nyatakan samada $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ bersandar linear atau tak bersandar linear.

[15 markah]

(c) Diberi $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ dengan

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad u_2=\begin{bmatrix}-5\\-3\\8\end{bmatrix},\quad u_3=\begin{bmatrix}2\\7\\-9\end{bmatrix}$$

(i) Tuliskan $w=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ sebagai gabungan linear vektor-vektor dalam U.

(ii) Dari (i), tunjukkan bahawa U tidak merentang $\mathbb{R}^3$.

(iii) Tunjukkan bahawa $\{u_1,u_2\}$ tak bersandar linear.

(iv) Beri contoh suatu vektor $v\in\mathbb{R}^3$ sedemikian hingga $\{u_1,u_2,v\}$ membentuk asas bagi $\mathbb{R}^3$.

[25 markah]

...5/-

(d) Dalam setiap kes berikut tunjukkan bahawa kenyataan adalah benar atau berikan contoh lawan untuk menunjukkan kenyataan adalah salah.

(i) Jika $\{u,v,w\}$ adalah tak bersandar linear, maka $\{u,v\}$ adalah tak bersandar linear.

(ii) Jika $\alpha u+\beta v+\gamma w=0$ dengan $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, maka $\{u,v,w\}$ adalah tak bersandar linear.

(iii) $\mathbb{R}^3$ mempunyai suatu asas yang berbentuk $\{u,u+v,v\}$ dengan $u,v,\in\mathbb{R}^3$.

(iv) Andaikan U dan W subruang $\mathbb{R}^n$ dengan $U\subseteq W$. Jika Dim W=1, maka $U=\{0\}$ atau $U=W$.

[40 markah]

4. (a) Tentukan sama ada yang berikut adalah transformasi linear:

(i) $T:P_n\to\mathbb{R}$ dengan $T(a_0+a_0x\ldots+a_nx^n)=a_n$.

(ii) $T:M_{n\times n}\to\mathbb{R}$ dengan $T(A)=r(A)$

$[r(A)=\text{pangkat } A]$

[10 markah]

(b) (i) Cari suatu transformasi linear T yang mempunyai sifat-sifat berikut dan kirakan $T(v)$.

$$T:P_2\to P_4$$

$T(1)=x^4,\ T(x+x^2)=1,\ T(x-x^2)=x+x^3,\ v=a+b+cx^2.$

(iii) Biarkan transformasi linear $T:M_{n\times n}\to M_{n\times n}$ ditakrif sebagai $T(A)=A-A^T$ untuk semua $A\in M_{n\times n}$. Tunjukkan bahawa

$$\ker T=\{A=M_{n\times n}\,|A \text{ adalah simetri}\}$$

dan

$$\operatorname{Im} T=\{S=M_{n\times n}\,|S \text{ adalah simetri pencong}\}$$

[30 markah]

(c) Diberi

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

(i) Dapatkan polinomial cirian bagi A.

(ii) Apakah nilai-nilai eigen A?

(iii) Terangkan mengapa A adalah terpepenjurukan.

(iv) Dapatkan matriks tak singular P dan matriks pepenjuru D sedemikian hingga $P^{-1}AP=D$.

[40 markah]

(d) Dalam setiap kes berikut tunjukkan bahawa kenyataan adalah benar atau berikan contoh lawan untuk menunjukkan kenyataan adalah salah.

(i) Andai $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linear. Jika Dim $V = 4$ dan Dim $W = 3$, maka T adalah satu ke satu.

(ii) Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka A adalah terpepenjurukan untuk semua nilai $c \in \mathbb{R}$.

(iii) Jika $A^2 = A$ dan λ nilai eigen A maka $\lambda = 0$ atau 1.

[20 markah]

- ooo O ooo -