

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2004/2005

Mei 2005

MAT 102 – KALKULUS LANJUTAN

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan.

...2/-

1. (a) Tentukan sama ada siri yang berikut adalah menumpu atau mencapah.

(i)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! (k^2 + 7)}{4^k}$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 6}{k \sqrt{k^5 + 4}}$$

(iii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

(b) Diberi
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ A, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(i) Cari $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(ii) Cari A jika fungsi f adalah selanjar pada $(0, 0)$.

- (c) (i) Dapatkan siri Maclaurin bagi fungsi $f(x) = e^x$.
Tentukan selang penumpuan siri ini.
- (ii) Dengan menggunakan hasil dalam bahagian (i), dapatkan siri Maclaurin bagi fungsi $g(x) = e^{-x^2}$.
Cari $g^{(102)}(0)$.

[100 markah]

2. (a) Cari had yang berikut :

(i)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{2x}$$

(ii)
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right)$$

(iii)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{x}\right) \left(\sin \frac{1}{x}\right)$$

- (b) Diberi $f(x, y, z) = x - y + z$.

(i) Cari maksimum dan minimum fungsi f pada sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

- (ii) Cari terbitan berarah bagi fungsi f pada titik $P(0, 0, 10)$ dalam arah $(0, 1, 0)$.

Dalam arah apakah f menokok secara terpanas pada titik P dan apakah nilai kadar perubahan ini ?

[100 markah]

3. (a) (i) Dengan menggunakan takrif $\ln t = \int_1^t \frac{1}{x} dx$, $t > 0$, atau cara

lain, tunjukkan bahawa bagi $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

- (ii) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \geq 1.$$

Tunjukkan bahawa jujukan $\{a_n\}$ adalah menyusut.

Tunjukkan bahawa $0 \leq a_n \leq 1$, $\forall n \geq 1$.

Adakah $\{a_n\}$ menumpu atau mencapah? Berikan alasan.

- (b) Andaikan $f(x, y) = x \ln \frac{y}{x}$.

- (i) Cari $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$.

- (ii) Tunjukkan bahawa $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

- (c) $G(x, y, z)$ ialah suatu fungsi yang terbezakan dan $G(x, y, z) = 0$ menentukan secara tersirat suatu fungsi g supaya $z = g(x, y)$.

Tunjukkan bahawa $\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}}$.

Seterusnya, dapatkan $\frac{\partial z}{\partial x}$ jika diberi

$$\ln(2xy) + \tan(y^2 z) - xz^2 = 0.$$

[100 markah]

4. (a) Tentukan sama ada kamiran tak wajar yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\int_1^{\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{4x^6 - 2x - 1}} dx$

(ii) $\int_{0^+}^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$

(b) Nilai kamiran yang berikut :

(i) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3) dy dx$

(ii) $\iint_A \cos(x^2 + y^2) dx dy$

di mana A adalah kawasan pada sukuan pertama yang terletak di dalam bulatan $x^2 + y^2 = 25$.

(iii) $\iint_D x dx dy$

di mana D adalah kawasan yang dibatasi oleh lengkung $y = x^2 + 1$, garis lurus $y = 2x$ dan paksi y .

(c) Cari isipadu bongkah yang dibatasi di atas oleh sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $a > 0$, dan dibatasi di bawah oleh satah $z = a$.

[100 markah]

- 000 O 000 -