

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

MAT 102 – KALKULUS LANJUTAN

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua EMPAT** soalan.

...2/-

1. (a) Cari had fungsi atau jujukan yang berikut :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{ax} - x}{1 - \cos ax}$, $a \neq 0$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x + 5x - 1)^{\frac{1}{x}}$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\ln n} \sin\left(\pi n + \frac{1}{\ln n}\right)$

(x merupakan nombor nyata dan n integer positif)

(b) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2n+5}{3n+4} a_n, \quad \forall n \geq 1.$$

(i) Tentukan sama ada jujukan menokok atau menyusut.

(ii) Adakah jujukan $\{a_n\}$ terbatasi dari bawah?

(iii) Wujudkan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$? Jika ya, cari had ini.

(iv) Adakah siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu atau mencapah?

(Berikan alasan untuk menyokong jawapan anda)

(c) Diberi $F = V(x, y) e^{ax+by}$ di mana a dan b adalah pemalar dan $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 0$.

(i) Cari $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ dan $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ dalam sebutan x , y , V , $\frac{\partial V}{\partial x}$ dan $\frac{\partial V}{\partial y}$.

(ii) Cari a dan b yang menghasilkan

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} + F = 0.$$

(100 markah)

2. (a) Kaji sama ada siri nombor yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k^2}{k^4 + \sqrt{k}}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! e^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$

(iii) $\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k + \ln k}$

(iv) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}}{\ln k}$

- (b) (i) Dapatkan polinomial Taylor berdarjah 3 di sekitar titik 0 bagi fungsi $f(x) = \sin x$.
- (ii) Jika $\sin x$ dianggarkan dengan polinomial ini bagi $x \in [-0.2, 0.2]$, cari ralat maksimum bagi anggaran ini.
- (c) Diberi $f \in C^\infty(\mathfrak{R})$. Jika $f^{(k)}(x) = 0, \forall k > m, \forall x \in \mathfrak{R}$ dan $f^{(m)}(0) \neq 0$, di mana m ialah suatu integer positif tetap, buktikan bahawa f ialah suatu polinomial berdarjah m .

(100 markah)

3. (a) Andaikan $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{\sin(x^2 + y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- (i) Cari $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
- (ii) Adakah fungsi f selanjar pada $(0, 0)$? Berikan alasan.
- (iii) Cari $\frac{\partial f}{\partial x}$ pada $(0, 0)$, jika wujud.
- (b) Diberi fungsi $f(x, y) = 3x^2 - 4x + 3y^2, (x, y) \in \mathfrak{R}^2$.
- (i) Cari dan kelaskan titik gentingnya.
- (ii) Cari nilai ekstremum f pada rantau $D = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- (c) Jika $z = f(x^2 - y^2) + xy$ di mana f adalah fungsi yang terbezakan, tunjukkan bahawa $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$.
- (d) Diberi siri nombor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mencapah tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ menumpu.
- (i) Adakah siri nombor $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ menumpu atau mencapah? Berikan alasan untuk jawapan anda.
- (ii) Berbantuan hasil dari (i), tentukan sama ada siri $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - \sqrt{k}}{\sqrt{k} 3^k}$ menumpu atau mencapah.

(100 markah)

4. (a) (i) Tentukan sama ada kamiran tak wajar $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{7x^6 + 1}}{9x^4 - 2x^2 + 3} dx$ menumpu atau mencapah.
- (ii) Cari semua nilai nombor nyata p supaya $\int_{0^+}^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$ menumpu.

...4/-

(b) Nilai kamiran yang berikut :

(i) $\iint_A \frac{1}{y^2+1} dx dy$ di mana kawasan A ialah segitiga yang dibatasi oleh garis $x=2y$, $y=-x$ dan $y=2$.

(ii) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right) dx dy$

(iii) $\iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy$ di mana $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

(iv) Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bersilang dengan suatu sfera lain yang jejarianya juga 1 dengan pusatnya di $(0, 0, 1)$. Cari isipadu persilangan di antara kedua-dua sfera ini.

(100 markah)

-ooo000ooo-