UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

MAT 102 – KALKULUS LANJUTAN

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** soalan di dalam **LIMA [5]** halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Jawab kesemua EMPAT (4) soalan.

1. (a) Kaji sama ada siri nombor yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{e^k}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\, 2^{k-1}}{9^{k+1}}$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-x^3}\, dx$

(b) Tentukan sama ada kamiran tak wajar yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$

(ii) $\int_{0^+}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{x} - x^4}\, dx$

(c) (i) Jika siri nombor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu, buktikan bahawa $\underset{n\to\infty}{had}\; a_n = 0$.

(ii) Pertimbangkan akas bagi (i) :

jika $\underset{n\to\infty}{had}\; a_n = 0$, maka siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu.

Jika ia benar, buktikannya; jika ia tidak benar, berikan contoh untuk menunjukkan ia tidak benar.

(iii) Jika $a_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu, adakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\,2}}$ menumpu atau mencapah ? Berikan alasan untuk jawapan anda.

(100 markah)

2. (a) Diberi fungsi $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy\,\ell n \dfrac{y}{x}$.

(i) Cari $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(ii) Tunjukkan bahawa $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2f$.

(b) Fungsi Γ ditakrifkan sebagai $\Gamma(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, \quad s \in (0, \infty)$.

(i) Buktikan bahawa kamiran tak wajar $\int_{0^+}^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx$ adalah menumpu $\forall\, s > 0$.

(ii) Tunjukkan bahawa $\Gamma(1) = 1$.

(iii) Tunjukkan $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s), \quad \forall\, s > 0$.
Dengan ini, nilaikan $\Gamma(n+1)$, di mana n ialah suatu integer positif.

(c) Jika fungsi f ditakrifkan sebagai $f(x,y,z) = x^2 y^2 z^2$, cari maksimum pada sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, di mana $a > 0$.

(100 markah)

3. (a) Jika $f(x,y) = \dfrac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, tentukan sama ada $\underset{(x,y)\to(0,0)}{had} f(x,y)$ wujud.

(b) Nilaikan kamiran yang berikut :

(i) Nilaikan $\int_0^1 \int_y^1 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}\, dx\, dy$

(ii) Nilaikan $\iint_D \dfrac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^5}$ di mana D merupakan sukuan pertama pada satah xy.

(iii) Cari isipadu bongkah yang dibatasi di atas oleh sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ dan di bawah oleh satah $z = 4$.

(c) (i) Tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

dan dapatkan selang penumpuannya.

(ii) Dengan menggunakan hasil dalam (i), tunjukkan bahawa

$$\ell n(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

(iii) Gunakan hasil atas untuk mencari hasil tambah siri nombor

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{2 \cdot 7^2} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} - \frac{1}{4 \cdot 7^4} + \cdots$$

[100 markah]

4. (a) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan secara rekursi sebagai

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 5 - \frac{4}{a_n}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

(i) Tunjukkan bahawa $a_n \geq 4, \ \ \forall\, n \geq 1$.

(ii) Tunjukan bahawa jujukan $\{a_n\}$ adalah menyusut.

(iii) Adakah $\underset{n\to\infty}{had}\ a_n$ wujud ? Berikan alasan.
Jika had ini wujud, carinya.

(b) Cari had yang berikut :

(i) $\underset{x\to 0}{had} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

(ii) $\underset{x\to\infty}{had} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x$, di mana a dan b adalah dua nombor yang positif.

(c) u dan v adalah fungsi dalam sebutan x, y, dan $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Diberi $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ dan $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

(i) Tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Tambahan pula, andaikan $f(x, y)$ adalah suatu fungsi yang terbezakan.

(ii) Tuliskan $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ dalam sebutan $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ dan $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

(iii) Tunjukkan bahawa

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

(iv) Tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

[100 markah]

-ooo000ooo-