

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2003/2004

April 2004

MAT 102 – Kalkulus Lanjutan

Masa : 3 jam

ARAHAN KEPADA CALON

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** soalan di dalam **EMPAT [4]** halaman muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) (i) Jika $a_n = \frac{1 - (1 - \frac{1}{n})^3}{1 - (1 - \frac{1}{n})^2}$, $n \geq 1$, dapatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (ii) Jika jujukan $\{b_n\}$ memenuhi sifat berikut :
- $$\frac{n}{(n+1)^3} + \frac{n}{(n+2)^3} + \dots + \frac{n}{(n+n)^3} \leq b_n \leq \frac{\ln n}{n}, \quad \forall n \geq 1,$$
- cari $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

- (b) (i) Dengan menggunakan kembangan siri Taylor, dapatkan siri kuasa di sekitar $x = 0$ bagi fungsi $f(x) = e^{-x}$.
Apakah selang penumpuan bagi siri ini ?
- (ii) Seterusnya, dapatkan siri kuasa bagi fungsi $g(x) = e^{-2x^2}$.
Apakah nilai $g^{(20)}(0)$?

- (c) Jika $w = f\left(\frac{r-s}{s}\right)$ di mana f adalah terbezakan, tunjukkan bahawa
- $$r \frac{\partial w}{\partial r} + s \frac{\partial w}{\partial s} = 0.$$

[100 markah]

2. (a) Tentukan sama ada siri nombor yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{(k+1)! k^2}$

(ii) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1 + \ln k}{k (\ln k)^2}$

- (b) Tentukan sama ada siri $\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{5k-2}$ mencapah, menumpu bersyarat atau menumpu mutlak.

- (c) Jika suatu kuantiti f diberikan sebagai

$$f(x, y) = 2y^2 + 12x^2 - y,$$

cari titik-titik pada elips $12x^2 + 4y^2 = 1$ yang mana berlakunya maksimum dan minimum bagi f .

[100 markah]

3. (a) Diberi fungsi $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - 2x^2y - 3y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- (i) Tentukan sama ada $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ wujud.
- (ii) Adakah f selanjar pada $(0, 0)$? Berikan alasan.
- (iii) Tentukan sama ada $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ wujud dan dapatkan nilainya jika wujud.
- (b) Tentukan sama ada kamiran tak wajar yang berikut menumpu atau mencapah.
- (i) $\int_1^{\infty} \frac{6x^2 + 2x - 5}{\sqrt{3x^8 + 4}} dx$
- (ii) $\int_{1^+}^{3/2} \frac{\ln(x-1)}{2-x} dx$
- (c) Jika $w = x^3 - 3x^2y - xy^2$, $x = \cos(uv)$ dan $y = u \ln v$, cari
- (i) $\frac{\partial w}{\partial u}$ dan $\frac{\partial w}{\partial v}$
- (ii) $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$ pada $(u, v) = (0, 1)$.

[100 markah]

4. (a) Cari had yang berikut :
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{1 + \ln x}}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(x-1))^{100} (x-1)$
- (b) Dapatkan nilai kamiran yang berikut :
- (i) $\iint_A \cos xy \, dx dy$

di mana A adalah kawasan yang dibatasi oleh lengkung $y = \frac{1}{x}$, garis $x = 1$, garis $x = 2$ dan paksi x .

(ii) $\int_0^1 \int_{3,y}^3 e^{x^2} dx dy$

(iii) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

di mana D adalah kawasan di atas paksi x yang dibatasi oleh paksi x dan semi bulatan $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$).

- (c) Cari isipadu persilangan di oktan pertama di antara kawasan di dalam silinder $x^2 + y^2 = 4$ dan di dalam silinder $y^2 + z^2 = 4$.

[100 markah]

- ooo O ooo -