

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

**Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2003/2004**

September / Oktober 2003

MAT 101 KALKULUS

Masa: [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** soalan di dalam **LIMA [5]** halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab semua soalan.

1. a) Dengan menggunakan takrif had, buktikan bahawa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 + 4} = \frac{1}{5}$$

b) Diberi $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 + \ln x, & x > 1 \end{cases}$

(i) Tentukan sama ada f selanjar pada $x = 0$ dan $x = 1$.

(ii) Cari $f'(x)$.

(iii) Wujudkah $c \in [1, 3]$ dengan $f(c) = 2\frac{1}{2}$?

Adakah keputusan ini bercanggah dengan Teorem Nilai Pertengahan?

Terangkan.

c) Buktikan bahawa $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

[100 markah]

2. a) Cari had yang berikut :

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{5} \right)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 9|}{2x - 6}$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7t-10} - t}{2-t}$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x} \right)$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad a > 0$$

b) (i) Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, buktikan dengan takrif had bahawa

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|.$$

(ii) Dengan keputusan dalam (i), buktikan bahawa jika fungsi g selajar pada $x = a$, maka fungsi $|g|$ juga selajar pada $x = a$.

c) Pertimbangkan persamaan $x^{101} + x^{51} + x - 1 = 0$.

(i) Buktikan persamaan ini mempunyai suatu penyelesaian.

(ii) Buktikan penyelesaian persamaan ini adalah unik.

[100 markah]

3. a) (i) Jika $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $\forall x > 0$, cari minimum f .
- (ii) Dengan menggunakan hasil dalam (i), tunjukkan bahawa

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geq e^2, \quad \forall x, y > 0.$$

- b) Dengan menggunakan hasil tambah atas dan hasil tambah bawah bagi partisi yang sesuai pada selang $[0, 2]$, tunjukkan bahawa

$$\frac{17}{33} \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^4} dx \leq 1\frac{1}{2}.$$

- c) Diberi $f(x) = \frac{8(2-x)}{(x+2)^3}$, $\forall x \neq -2$.

- (i) Dapatkan semua asimptot bagi f .
- (ii) Cari ekstremum setempat bagi f dan titik lengkok balas bagi f .
- (iii) Tentukan di mana graf f menokok, menyusut, berbentuk cembung atau cekung.
- (iv) Dengan sifat-sifat atas, lakarkan f .

[100 markah]

4. a) Cari kamiran yang berikut :

$$(i) \int x \tan^{-1} x^2 dx$$

$$(ii) \int \frac{e^x dx}{2e^{2x} - 5e^x - 3}$$

$$(iii) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$$

$$(iv) \int_{16}^{81} \frac{dx}{x^4 - x}$$

b) (i) Andaikan f ialah suatu fungsi yang selanjar pada $[0, \infty)$.

Jika $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x > 0$, cari $F'(x)$.

Jika $\int_0^x f(t) dt = x \sin x + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt$, $\forall x \geq 0$,

cari $f(x)$, $\forall x > 0$.

Apakah nilai $f(0)$?

(ii) Tunjukkan bahawa tidak wujud fungsi g dengan

$$\int_1^x g(t) dt = x^3 + 2x, \quad \forall x \geq 1.$$

[100 markah]