

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

**Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2003/2004**

April 2004

MAT 101 – Kalkulus

Masa : 3 jam

ARAHAN KEPADA CALON

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** soalan di dalam **TIGA [3]** halaman muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Cari had-had yang berikut.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}, \text{ di mana } a > b.$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x^2 - 16|}$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-4} \int_4^x \ln t \, dt$$

- (b) Tunjukkan bahawa persamaan $2x - 1 - \sin x = 0$ mempunyai suatu penyelesaian pada selang $[0, 1]$.

- (c) Bagi sebarang nombor nyata a dan b , buktikan bahawa

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b|.$$

[100 markah]

2. (a) Dengan menggunakan takrif had, tunjukkan bahawa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{4}.$$

- (b) Andaikan $f(x) = \begin{cases} ax - 4, & x \neq 2 \\ b, & x = 2 \end{cases}$. Cari a dan b supaya f adalah

fungsi yang selanjut.

- (c) Cari luas segiempat tepat yang terbesar yang dapat diterap di dalam semi bulatan berjejari 1 unit.

[100 markah]

3. (a) Andaikan $g(x) = \begin{cases} -1 - 2x, & x < -1 \\ x^2, & -1 < x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$.

- (i) Cari $g'(x)$.

- (ii) Tambahan pula, jika diberi fungsi $h(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$, cari $h \circ g$ dan $(h \circ g)'(\frac{1}{2})$.

- (b) Andaikan fungsi $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$.
- Dapatkan semua asimptot mencancang dan mengufuk f .
 - Cari ekstremum setempat f dan titik lengkok balas f .
 - Tentukan di mana graf f menokok, menyusut, berbentuk cembung atau cekung.
 - Dengan sifat-sifat di atas, lakarkan graf f .

[100 markah]

4. (a) Kamirkan yang berikut :

(i) $\int_2^e \frac{1 + \sqrt{\ln x}}{x \ln x} dx$

(ii) $\int \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$

(iii) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 + 4x^2}}$

(iv) $\int \sin \sqrt{x} dx$

- (b) Dengan mendapatkan batas a dan b yang sesuai dan bersifat

$$a \leq \frac{1}{\sqrt{4+x+x^5}} \leq b, \quad x \in [0, 1],$$

tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{4\sqrt{6}} \leq \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4+x+x^5}} dx \leq \frac{1}{8}.$$

[100 markah]