UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

JIM 418/421 – Aljabar Moden

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Katakan $\boldsymbol{R}$ set semua nombor nyata. Tentukan sama ada setiap hubungan atas $\boldsymbol{R}$ yang ditakrifkan seperti berikut adalah refleksif, simetri atau transitif.

(i) $\boldsymbol{xHy} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \leq 1$
(ii) $\boldsymbol{xHy} \Leftrightarrow \boldsymbol{xy} \geq 0$.

(40 markah)

(b) Katakan $A = \{1, 2, 3\}$. Cari

(i) semua partisi bagi $\boldsymbol{A}$
(ii) semua hubungan kesetaraan atas $\boldsymbol{A}$.

(30 markah)

(c) Katakan $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ dan $\boldsymbol{D}$ ialah empat set yang tak kosong dan $f:A \rightarrow B$, $g:B \rightarrow C$, $h:C \rightarrow D$ ialah tiga fungsi. Buktikan bahawa $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

(30 markah)

2. (a) Katakan $\langle G, * \rangle$ ialah suatu kumpulan dan $a \in G$. Buktikan bahawa $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ bagi semua integer positif $\boldsymbol{n}$.

(30 markah)

(b) Jika $\boldsymbol{G}$ ialah satu kumpulan yang mematuhi $(a.b)^i = a^i . b^i$ untuk tiga integer $\boldsymbol{i}$ yang berturutan bagi semua $a, b \in G$, tunjukkan bahawa $\boldsymbol{G}$ adalah Abelan.

(30 markah)

(c) Jika $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\beta = (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5\ 6)$

Cari
(i) $\mathbf{O}(\alpha)$ dan $\mathbf{O}(\beta)$
(ii) α^{21}
(iii) β^{-21}.

(40 markah)

3. (a) Katakan $\boldsymbol{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in Z \right\}$ di bawah penambahan yang biasa bagi matriks. Katakan $\boldsymbol{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a+b+c+d=0 \right\}$. Buktikan bahawa $\boldsymbol{H}$ ialah satu subkumpulan bagi $\boldsymbol{G}$.

(30 markah)

(b) Katakan $\langle G,* \rangle$ ialah suatu kumpulan, $a \in G$ dan $\mathbf{O}(a) = p$. Buktikan bahawa

$$H = \left\{ a, a^2, a^3, \ldots, a^p = e \right\}$$

ialah subkumpulan Abelan bagi $\boldsymbol{G}$.

(30 markah)

(c) Tentukan semua koset bagi $\langle \alpha \rangle$ dalam S_4 dengan $\alpha = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$.

(40 markah)

4. (a) Katakan $\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{e}, (1 \ \ 2)(3 \ \ 4)\}$. Tunjukkan bahawa $\boldsymbol{H}$ bukan subkumpulan normal bagi A_4.

(30 markah)

(b) Katakan $\boldsymbol{H}$ ialah subkumpulan bagi suatu kumpulan $\langle G,* \rangle$. Buktikan bahawa $Ha = Hb$ jika dan hanya jika $a \ * \ b^{-1} \in \boldsymbol{H}$.

(30 markah)

(c) Katakan $\boldsymbol{K}$ ialah suatu subkumpulan wajar bagi $\boldsymbol{H}$, dan $\boldsymbol{H}$ ialah suatu subkumpulan wajar bagi $\boldsymbol{G}$. Jika $|\boldsymbol{K}| = 42$ dan $|\boldsymbol{G}| = 420$, nyatakan peringkat-peringkat yang mungkin bagi $\boldsymbol{H}$.

(40 markah)

5. (a) Katakan ϕ ialah suatu homomorfisma daripada kumpulan $\langle G, \circ \rangle$ ke kumpulan $\langle H, * \rangle$ dan

$$K = \text{Inti } \phi = \{ x \in G \mid x\phi = f \}$$

dengan f sebagai identiti bagi H.

Buktikan bahawa K ialah subkumpulan normal bagi G.

(30 markah)

(b) Biarkan G sebagai suatu kumpulan dan g merupakan satu unsur dalam G. Takrifkan $\phi : G \to G$ dengan $\phi(x) = gxg^{-1}$, $\forall x \in G$. Buktikan bahawa ϕ ialah satu automorfisma atas G.

(35 markah)

(c) Jika A dan B ialah dua unggulan bagi gelanggang R, hasil tambah A dan B ditakrifkan sebagai

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}.$$

Tunjukkan bahawa $A + B$ ialah suatu unggulan.

(35 markah)

- oooOooo -